

**Zur Stabilität stationärer Konvektion
in einer homogenen Flüssigkeitskugel**

Gebhard Geiger

1977

Zur
Stabilität stationärer Konvektion
in einer homogenen Flüssigkeitskugel

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der
Ludwig - Maximilians - Universität
München

vorgelegt
von

Gebhard Geiger

München im Juni 1977



1. Berichterstatter: Dr. Dietrich Lortz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Bross

Tag der mündlichen Prüfung: 21.11. 1977

Inhalt

I. Einleitung

Klassische Rayleigh - Bénard - Konvektion
und verwandte Probleme

II. Grundgleichungen, Störungsansatz und Stabilitätsproblem

III. Das homogene Problem

IV. Die Gleichungen 2. Ordnung

V. Die Eigenwertstörungen 2. Ordnung

VI. Der Wärmetransport

VII. Zusammenfassung

Anhang

A. Zur allgemeinen Lösung des homogenen Problems

B. Zur Konstruktion spezieller Lösungen der inhomogenen Gleichungen

C. Infinitesimale Rotation der stationären Gleichungen

Literatur

I. Einleitung

Klassische Rayleigh - Bénard - Konvektion und verwandte Probleme

Unter den Konvektionsproblemen in Astrophysik, Meteorologie und den Geowissenschaften nimmt das sog. Stabilitätsproblem eine besondere Stellung ein. Es tritt dort auf, wo in einem ursprünglich statischen System, das durch einen oder mehrere Parameter gekennzeichnet ist, beim Überschreiten bestimmter Parameterwerte das System instabil wird und Konvektionsströmung einsetzt. Und weiterhin stellt sich die Frage, für welche Parameterwerte die einsetzende Konvektion zu einem stationären Endzustand führt, sich etwa eine instationäre Strömung mit oszillierender Amplitude oder gar mit der Zeit turbulente Strömung einstellt.

Die Frage nach der konvektiven Stabilität eines zunächst statischen Systems wurde von Bénard (1901) zum ersten Mal experimentell, von Lord Rayleigh (1916) theoretisch untersucht: Erhitzt man eine ebene Flüssigkeits- oder Gasschicht von unten und überschreitet der der Schwerkraft entgegengerichtete Temperaturgradient in der Schicht einen bestimmten kritischen Wert, wird die Schicht thermisch instabil, und es setzt Konvektion ein. Bei nur geringer Abweichung des tatsächlichen Temperaturgradienten vom kritischen Wert bleibt die Strömung stationär und ordnet sich meist zu einem Muster regelmäßiger Sechseckzellen (innen aufsteigende, am Zellenrand absteigende Materie) bzw. die ganze Ebene überdeckender paralleler Walzen. Für die ebene Flüssigkeitsschicht hat Lord Rayleigh den kritischen Temperatur-

gradienten (als dimensionslose Größe kritische "Rayleighzahl" genannt) zum ersten Mal theoretisch bestimmt, bei Gasen tritt an seine Stelle als Stabilitätskriterium das Überschreiten des sog. adiabatischen Temperaturgradienten, oft als "Schwarzschildkriterium" (Schwarzschild 1958) bezeichnet.

Zur weiteren Behandlung des Stabilitätsproblems der ebenen Schicht ist seit Bénard und Lord Rayleigh viel experimentiert und gerechnet worden, eine Übersicht und Zusammenfassung findet man z.B. bei Spiegel (1971). Unter den dabei benutzten Methoden sei hier lediglich die störungstechnische Behandlung der nichtlinearen zeitabhängigen Konvektionsgleichungen für die schwach überkritische Schicht hervorgehoben (Malkus & Veronis 1958; Kuo 1961; Schlüter, Lortz & Busse 1965), da sie auch der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt. Der Vorteil dieser Methode, die in Abschnitt II entwickelt wird, liegt darin, daß sie es gestattet, die nichtlinearen Konvektionsgleichungen rein analytisch bzw. mit geringem numerischem Aufwand zu lösen, und sie die Tendenz der zeitlichen Entwicklung der einsetzenden Strömung - allerdings nur bei schwach überkritischer Temperaturschichtung - exakt wiedergibt (Lortz 1961; Busse 1962).

Gegenüber dem ebenen Rayleigh - Bénard - Problem stellen sich in Geo- und Astrophysik vorwiegend radialsymmetrische Konvektionsprobleme: Konvektion in Sternatmosphären, in konvektiven Schichten im Sterninnern oder im Erdmantel (Kugelschalen) bzw. im Sternzentrum oder im Erdinnern (Vollkugeln). Gemessen am ebenen Rayleigh - Bénard - Problem ist über das konvektive Stabilitätsverhalten radialsymmetrischer Systeme wenig bekannt. Die kompliziertere Geometrie erschwert die theoretische Behandlung der Konvektionsgleichungen,

und sphärische experimentelle Anordnungen mit dem Gravitationszentrum im Kugelmittelpunkt sind im Labor nicht zu simulieren. Erste wesentliche Anknüpfungspunkte liefert Chandrasekhars (1961) linearisierte Theorie für infinitesimale Strömungsamplituden. Chandrasekhar untersucht dort Vollkugeln und Kugelschalen verschiedener Schichtdicke mit konstanter Massendichte und homogener Energiequellenverteilung im Innern bzw. Kugelschalen ohne eigene Wärmequellen, die aber - analog der von unten erhitzten ebenen Schicht - aus dem Kugelinnern heraus beheizt werden. In diesem Stadium der Theorie ergeben sich bereits die kritischen Rayleighzahlen, jedoch macht die Theorie keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Strömung bei endlicher Amplitude. Auch sind die kritischen Rayleighzahlen als Eigenwerte der linearen Gleichungen, wie im Fall der ebenen Schicht, entartet, und ohne die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte macht die Theorie keine Aussage darüber, mit welcher der verschiedenen möglichen Lösungen des linearisierten Problems die Konvektion beim Überschreiten des kritischen Temperaturgefälles bevorzugt einsetzt.

Baldwin (1967) berechnet zwar für die homogene Vollkugel eine achsialsymmetrische Lösung der nichtlinearen Gleichungen, klammert dabei aber das Stabilitätsproblem aus. Weder untersucht er die zeitliche Stabilität seiner Lösung noch zeigt er, daß diese tatsächlich die bevorzugte Strömung beim Einsetzen der Konvektion darstellt. Durney (1968) und Young (1974) berechnen für die von innen beheizte Kugelschale einige ausgewählte axial- und nicht-achsialsymmetrische Lösungen der nichtlinearen Gleichungen und untersuchen sie hinsichtlich ihres Stabilitätsverhaltens. Busse (1975) gelingt ohne jeglichen analytischen Aufwand eine wesentliche Reduktion der Entartung beim Einsetzen der Strömung in konvektionsinstabilen Kugelschalen. Eine

auch nur annähernd erschöpfende Behandlung des sphärischen Stabilitätsproblems erfordert jedoch eine vollständige analytisch - störungstechnische oder numerische Lösung der vollen nichtlinearen zeitabhängigen Konvektionsgleichungen, die offenbar über die zitierten Ansätze hinaus noch nirgendwo in Angriff genommen wurde.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer strengen Lösung des Stabilitätsproblems für die homogene Vollkugel mit einem Temperaturgefälle, das nur geringfügig vom kritischen Wert abweicht. Die für die Astrophysik ebenfalls sehr wichtigen Fälle der Rotation (Chandrasekhar 1961; Weir 1976) oder der Berücksichtigung von Magnetfeldern bleiben dabei grundsätzlich außer Betracht. In Abschnitt II werden die Grundgleichungen aufgestellt und der störungstechnische Ansatz zu ihrer Lösung entwickelt. Die Abschnitte III und IV behandeln die Konvektionsgleichungen in den beiden niedrigsten Ordnungen bzgl. der in Abschnitt II erläuterten Reihenentwicklung. Abschnitt V bringt die entscheidende Stabilitätsrechnung und Interpretation des Ergebnisses. In Abschnitt VI wird der konvektive Wärmetransport berechnet und diskutiert. Die Abschnitte A bis C im Anhang sind der Ausführung mathematischer Hilfsoperationen und Beweise gewidmet.

II. Grundgleichungen, Störungsansatz und Stabilitäts - problem

Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeitskugel mit dem Radius r_0 , mit konstanter Massendichte ρ_0 sowie einer kontinuierlichen Wärmequellenverteilung im Kugelinnern mit der Energieerzeugungsrate $q_0(\underline{r}) = \text{const.}$ Die Materialkoeffizienten η (Viskosität), α (Wärmeausdehnung), χ (Wärmeleitung) und c_v (spezifische Wärme bei konstantem Volumen) seien temperaturunabhängig und somit ebenfalls über das ganze Kugelvolumen konstant. Die Kugel werde von ihrer Eigengravitation zusammengehalten. Dann gelten für den Druck $p_0(\underline{r})$, die Temperatur $T_0(\underline{r})$ und die Gravitationsbeschleunigung $\underline{g}_0(\underline{r})$ im statischen Gleichgewichtszustand der Kugel die Beziehungen (Bewegungsgleichungen)

$$(II.1) \quad \nabla p_0(\underline{r}) = \rho_0 \underline{g}_0(\underline{r}) = - \frac{\Gamma h_0 \rho_0}{r_0^3} \underline{r} \\ = - \gamma \underline{r}$$

mit $M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r_0^3$ und der Gravitationskonstanten Γ sowie

$$(II.2) \quad \chi \Delta T_0(\underline{r}) = -q_0(\underline{r}) \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung}).$$

Wir fragen nun nach der thermischen Stabilität dieser statischen Druck- und Temperaturschichtung und formulieren die Konvektionsgleichungen für Strömungsgeschwindigkeiten $\underline{v}$ mit kleiner, aber endlicher Amplitude. Das Hinzutreten des konvektiven Wärme- und Materietransports hat eine Störung der ursprünglichen Temperatur-, Druck- und Dichteverteilung zur Folge, die wir mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \varrho(\underline{r}, t) &= \varrho_0 + \varrho'(\underline{r}, t), \quad \left| \frac{\varrho'}{\varrho_0} \right| \ll 1 \\ p(\underline{r}, t) &= p_0(\underline{r}) + p'(\underline{r}, t), \quad \left| \frac{p'}{p_0} \right| \ll 1 \\ T(\underline{r}, t) &= T_0(\underline{r}) + T'(\underline{r}, t), \quad \left| \frac{T'}{T_0} \right| \ll 1 \end{aligned}$$

beschreiben. Die hydrodynamischen Grundgleichungen lauten:

$$\varrho(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{F} \quad (\text{Navier-Stokes-Gln.})$$

$$\varrho C_v (\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) T = -p \nabla \cdot \underline{v} + \nabla \cdot \underline{\chi} \nabla T + \phi - q_0 \quad (\text{Wärmetransportgleichung})$$

$$(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \varrho = -\varrho \nabla \cdot \underline{v} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

wobei $\underline{\underline{A}}$ den Spannungstensor, $\underline{F}$ die Dichte der an einem Volumenelement angreifenden äußeren Kräfte und ϕ die mechanische Dissipationsrate bezeichnet. Wir machen nun im folgenden Gebrauch von der sog. Boussinesq-Näherung der Grundgleichungen, die in der Literatur über das Stabilitätsproblem eine wesentliche Rolle spielt und die Grundgleichungen spürbar vereinfacht. Gerechtfertigt wird diese Näherung i.a. durch physikalische Plausibilitätsüberlegungen hinsichtlich der Eigenschaften einer realen, inkompressiblen Flüssigkeit mit vernachlässigbaren Dichteschwankungen und Strömungsgeschwindigkeiten, die klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sind. Mihaljan (1962) und Malkus (1964) haben jedoch gezeigt, daß es ein striktes Verfahren zur Ordnung der Zustandsgrößen, Strömungsgeschwindigkeiten und Materialkoeffizienten hinsichtlich des System charakterisierender Parameter gibt, das für bestimmte Parameterwerte den Geltungsbereich der Boussinesq-Näherung exakt anzugeben gestattet. Und dieses Verfahren läßt sich nicht nur auf inkompressible Flüssigkeiten, sondern auch auf Gase anwenden (Malkus 1964). Wir belassen es hier bei diesem Hinweis auf eine genaue Rechtfertigung der

Boussinesq - Näherung und beschränken uns auf eine kurze Wiedergabe einfacher Plausibilitätsüberlegungen, die die physikalischen Voraussetzungen der Boussinesq-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten für die Bedürfnisse der vorliegenden Arbeit hinreichend deutlich werden lassen:

a) Außer in der Zustandsgleichung und im Glied $\underline{F}$ der äußeren Kraftdichte wird die Dichte ϱ als konstant angenommen, d.h. ϱ' gegenüber ϱ_0 vernachlässigt.

b) Die Flüssigkeit ist inkompressibel, die Dichteschwankungen ϱ' gehen ausschließlich auf die Temperaturschwankungen T' zurück.

c) Die Dissipationsrate $\varnothing$ wird vernachlässigt.

d) Die Materialkoeffizienten werden als temperaturunabhängig und daher als über die ganze Kugel zeitlich konstant angenommen.

a) führt auf $\underline{F} = \varrho' \underline{g}_0(\underline{r})$, b) auf die Zustandsgleichung $\varrho = \varrho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$ bzw. $\varrho' = -\alpha \varrho_0 T'$. Die Grundgleichungen lauten nun bei Ausnutzung von (II.1) und (II.2)

$$(II.3a) \quad \varrho_0 (\partial_t + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = \eta \Delta \underline{v} + \varrho' \underline{g}_0(\underline{r}) - \underline{\nabla} p' \quad (\text{Navier-Stokes-Gleichungen})$$

$$(II.3b) \quad c_v \varrho_0 (\partial_t + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}) T = \chi \Delta T' \quad (\text{Wärmetransportgleichung})$$

$$(II.3c) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}).$$

Wir führen die dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\chi}{c_v \varrho_0 r_0^2} t \\ \underline{r}' &= \frac{\underline{r}}{r_0} \\ \underline{v}' &= \frac{c_v \varrho_0 r_0}{\chi} \underline{v} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{c_v \alpha \gamma r_0^4 g_0^2}{x \eta} T'$$

$$\pi = \frac{c_v g_0 r_0^2}{x \eta} p'$$

ein und erhalten aus (II.3), indem wir die Striche bei t' , r' und v' wieder weglassen

$$(II.4a) \quad \Delta \underline{v} + r \theta - x \pi = P^{-1} (\underline{v}_t + \underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{v}$$

$$(II.4b) \quad R \underline{r} \cdot \underline{v} + \Delta \theta = (\underline{v}_t + \underline{v} \cdot \underline{v}) \theta$$

$$(II.4c) \quad \underline{v} \cdot \underline{v} = 0.$$

Dabei sind die dimensionslosen Parameter P (Prandtlzahl) und R (Rayleighzahl) gegeben durch

$$P = \frac{c_v \eta}{x}$$

$$\text{und} \quad R = \frac{\alpha c_v \gamma r_0^6 g_0^2 q_0}{3 x^2 \eta} = \frac{2 \alpha \beta c_v \gamma r_0^6 g_0^2}{x \eta},$$

$$\text{wenn} \quad T_0 = \frac{q_0}{6x} (r_0^2 - r^2) = \beta (r_0^2 - r^2)$$

die (noch dimensionsbehaftete) Lösung von (II.2) ist, die der Randbedingung

$$T_0(r_0) = 0$$

gehört.

Zur Behandlung des Stabilitätsproblems suchen wir zunächst nach stationären Lösungen der Gleichungen (II.4) und fragen dann nach der zeitlichen Entwicklung zeitabhängiger infinitesimaler Störungen des stationären Gleichgewichts. D.h. wir substituieren

$$\begin{aligned}\underline{v} &\longrightarrow \underline{v}(\underline{r}) + \underline{u}(\underline{r}, t), \quad \partial_t \underline{v} = 0 \\ \theta &\longrightarrow \theta(\underline{r}) + \tau(\underline{r}, t), \quad \partial_t \theta = 0 \\ \pi &\longrightarrow \pi(\underline{r}) + \tilde{\pi}(\underline{r}, t), \quad \partial_t \pi = 0,\end{aligned}$$

machen den Exponentialansatz

$$\partial_t \underline{u} = \sigma \underline{u}$$

$$\partial_t \tau = \sigma \tau,$$

linearisieren (II.4) hinsichtlich der infinitesimalen Größen $\underline{u}, \tau, \tilde{\pi}$ und behandeln die sich daraus ergebenden stationären Gleichungen

$$(II.5a) \quad \Delta \underline{v} + \underline{r} \theta - \underline{\nabla} \pi = \mathcal{P}^{-1}(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}$$

$$(II.5b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{v} + \Delta \theta = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \theta$$

$$(II.5c) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

und die zeitabhängigen Gleichungen (Störungsgleichungen)

$$(II.6a) \quad \Delta \underline{u} + \underline{r} \tau - \underline{\nabla} \tilde{\pi} = \mathcal{P}^{-1}[\sigma \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}]$$

$$(II.6b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{u} + \Delta \tau = \sigma \tau + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \theta + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \tau$$

$$(II.6c) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

getrennt. In den Stabilitätsgleichungen treten die Lösungen des stationären Systems als Koeffizienten auf. Die Rayleighzahl $\mathcal{R}$, freier Parameter in (II.5), übernimmt in den Stabilitätsgleichungen die Rolle einer festen Konstanten, σ diejenige des Eigenwerts, der i.a.

von $\underline{v}$ und θ abhängen wird.

Das Stabilitätsproblem läßt sich nun folgendermaßen formulieren (Chandrasekhar 1961): Eigenwerte der Stabilitätsgleichungen mit $\text{Re } \sigma < 0$ lassen die dazugehörigen infinitesimalen Störungen des stationären Gleichgewichts exponentiell abklingen, die entsprechende Strömung $\underline{v}(\underline{r})$ heißt stabil. Lösungen $\underline{v}(\underline{r})$, die Eigenwerte mit $\text{Re } \sigma > 0$ nach sich ziehen, werden instabil, insbesondere, wenn $\text{Im } \sigma \neq 0$, überstabil genannt. In Bezug auf Eigenwerte mit $\text{Re } \sigma = 0$ herrscht neutrale Stabilität, falls $\text{Im } \sigma = 0$ bzw. $\text{Im } \sigma \neq 0$ jeweils stationär oder oszillierend.

Bei der Behandlung der stationären und der Stabilitätsgleichungen beschränken wir uns im folgenden, wie bereits erläutert, auf Werte R , die nur geringfügig von der kritischen Rayleighzahl R_k abweichen mögen:

$$\left| \frac{R - R_k}{R} \right| \ll 1 .$$

Dies gestattet die Entwicklung von R nach einem geeignet zu wählenden Störungsparameter $|\varepsilon| \ll 1$

$$(II.7) \quad R = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} R^{(\nu)},$$

$$(o) \quad R = R_k$$

mit noch zu bestimmenden Störungsanteilen $R^{(\nu)}$ der Rayleighzahl. Wie sich in Abschnitt VI herausstellen wird, bedeutet (II.7) in physikalischer Interpretation die Entwicklung von R nach der Quadratwurzel aus der Nusseltzahl $N - 1$, dem konvektiven Wärmetransport in radialer Richtung relativ zum statischen Energietransport durch Wärmeleitung. Bei nur kleinen Abweichungen $R - R_k$ von R_k bleiben auch die Amplituden von $\underline{v}$, θ und

π klein, und wir können

$$\underline{v} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \underline{v}^{(\nu)}$$

$$\theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \theta^{(\nu)}$$

$$\pi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \pi^{(\nu)}$$

ansetzen. Geht man damit in (II.5) ein und beschränkt sich in erster Näherung auf Glieder proportional ε , erhält man ein lineares homogenes Gleichungssystem mit dem Eigenwert $R^{(0)} = R_k$, wobei die Lösung des Systems nur bis auf den Amplitudenfaktor ε bestimmt ist. Mit dem gewählten Ansatz behandeln wir also die rechtsseitigen quadratischen Glieder in (II.5) als Korrekturterme höherer Ordnung zur Lösung der homogenen Gleichungen. Entsprechend lassen sich auch die zeitabhängigen Störungsgleichungen angehen. Mit dem Ansatz

$$\underline{u} = \sum_{\nu=0}^N \varepsilon^{\nu} \underline{u}^{(\nu+1)}$$

$$\tau = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} \tau^{(\nu+1)}$$

$$\pi = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} \pi^{(\nu+1)}$$

$$\sigma = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} \sigma^{(\nu)}$$

erhält man aus (II.6) bei Vernachlässigung aller höheren Potenzen von ε ein lineares homogenes Gleichungssystem mit dem Eigenwert $\sigma^{(0)}$. Die Terme in (II.6), die $\underline{v}$ und θ enthalten, übernehmen dabei die Rolle der Korrekturterme

höherer Ordnung. Ordnet man nun die Systeme (II.5) und (II.6) nach Potenzen von ε , erhält man Folgen von inhomogenen linearen Differentialgleichungssystemen

$$(II.8a) \quad \Delta \underline{v} + \underline{r} \underline{\theta} - \underline{v} \underline{\Pi} = \sum_{\nu=1}^{n-1} P^{-1} (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(\nu)} \underline{v}^{(n-\nu)}$$

$$(II.8b) \quad \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{v} + \Delta \underline{\theta} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \underline{v} \cdot \underline{v}^{(\nu)} \underline{\theta}^{(n-\nu)} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(n-\nu)}$$

$$(II.8c) \quad \underline{v} \cdot \underline{v}^{(n)} = 0$$

und

$$(II.9a) \quad \Delta \underline{u} + \underline{r} \underline{\zeta} - \underline{v} \underline{\Pi} = P^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(\nu)} \underline{u}^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (\underline{u} \cdot \underline{v})^{(\nu)} \underline{v}^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma^{(\nu)} \underline{u}^{(n-\nu)} \right)$$

$$(II.9b) \quad \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{u} + \Delta \underline{\zeta} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \underline{v} \cdot \underline{v}^{(\nu)} \underline{\zeta}^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \underline{u} \cdot \underline{v}^{(\nu)} \underline{\theta}^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma^{(\nu)} \underline{\zeta}^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{u}^{(n-\nu)}$$

$$(II.9c) \quad \underline{v} \cdot \underline{u}^{(n)} = 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

aus denen sich nacheinander nach Lösung der Gleichungen bis einschließlich n - ter Ordnung die Lösungen und Eigenwertstörungen $(n+1)$ - ter Ordnung bestimmen lassen. Wie schon bei Schlüter, Lortz & Russe (1965) gezeigt, hat der gewählte Ansatz den praktischen Vorteil, daß sich zu gleichem n die Systeme (II.8) und (II.9) simultan behandeln lassen. Es ergeben sich auf diese Weise Lösungen des Stabilitätsproblems in n - ter Näherung, die allerdings in folgender Hinsicht noch einer näheren Festlegung bedürfen: Jede Lösung $\underline{v}^{(n)}, \underline{\theta}^{(n)}, \underline{\Pi}^{(n)}$ der inhomogenen Gleichungen mit $n \geq 2$ ist nur bestimmt bis auf Vielfache der Lösungen $\underline{v}^{(1)}, \underline{\theta}^{(1)}, \underline{\Pi}^{(1)}$ des homogenen Problems, und diese Unbestimmtheit pflanzt sich in den Lösungen und Eigenwertstörungen der Ordnungen $m > n$ fort (Lortz 1961). Daraus sich ergebende Modifika-

tionen von $R^{(n)}$ führen jedoch bei fest vorgegebenem R über die Beziehung (II.7) lediglich zu einer Modifikation von $\underline{\varepsilon}$ und lassen im übrigen den Zusammenhang von $R, \underline{v}, \theta$ usw. unberührt. Man kann sich diesen Sachverhalt zunutze machen, indem man den Lösungen $\underline{v}^{(n)}$ mit $n \geq 2$ die Zusatzbedingung $\langle \theta^{(n)} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(n)} \rangle = 0$ auferlegt, wobei die spitzen Klammern Mittelung von $\theta^{(n)} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(n)}$ über das Kugelvolumen bedeuten. Durch Multiplikation von (II.8) mit $\theta^{(n)}$ und Mittelung über die gesamte Kugel zeigt sich nun unmittelbar, daß durch die gewählte Zusatzbedingung die Eigenwertstörung $R^{(n-1)}$ von den Störungen $R^{(n)}$ mit $n < n-1$ unabhängig geworden ist.

Da die Lösungen $\underline{v}$ und $\underline{u}$ von (II.8) und (II.9) divergenzfrei sein sollen, wählen wir für $\underline{v}$ und $\underline{u}$ die Darstellung durch poloidale und toroidale Vektorfelder (s.z.B. Chandrasekhar 1961)

$$\underline{v} = \underline{v}_P + \underline{v}_T$$

mit

$$(II.10) \quad \underline{v}_P = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{r} \psi)$$

$$(II.11) \quad \underline{v}_T = \underline{\nabla} \times \underline{r} \phi$$

$$(II.12) \quad \underline{r} \cdot \underline{v}_P = L^2 \psi$$

$$(II.13) \quad \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{v}_T = L^2 \phi$$

und L^2 als dem Winkelanteil des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten.

Um die Lösung der Grundgleichungen in Angriff nehmen zu können, fehlt nur noch die Formulierung der Randbedingungen. Für feste Randbegrenzung bei $r = 1$ muß gelten:

$$(II.14) \quad \theta(1) = \tau(1) = 0$$

$$(II.15) \quad \underline{v}(1) = \underline{u}(1) = 0,$$

für freie Randbegrenzungen gelten (II.14),

$$(II.16) \quad \underline{r} \cdot \underline{v}(1) = \underline{r} \cdot \underline{u}(1) = 0,$$

und die Tangentialkomponenten des Spannungstensors an der Oberfläche der Flüssigkeitskugel müssen verschwinden. Nach Chandrasekhar (1961) führt das auf

$$(II.17a) \quad \left(\partial_r - \frac{1}{r}\right) v_\vartheta = 0$$

$$(II.17b) \quad \left(\partial_r - \frac{1}{r}\right) v_\varphi = 0, \quad r = 1,$$

oder auch

$$(II.18) \quad \partial_{rr} \underline{r} \cdot \underline{v} \Big|_{r=1} = 0.$$

III. Das homogene Problem

Wir betrachten zunächst das System (II.9)
für $n = 1$:

$$(III.1a) \quad \Delta \underline{u}^{(1)} + \underline{r} \tilde{\tau}^{(1)} - \underline{\nabla} \tilde{\pi}^{(1)} = \mathcal{P}^{-1} \underline{\sigma}^{(0)} \underline{u}^{(1)}$$

$$(III.1b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{u}^{(1)} + \Delta \tilde{\tau}^{(1)} = \underline{\sigma}^{(0)} \tilde{\tau}^{(1)}$$

und die zum Eigenwert $\underline{\sigma}^{(0)*}$ gehörenden konjugiert komplexen Gleichungen. Multiplikation von (III.1a) mit $\mathcal{R} \underline{u}^{(1)*}$ und von (III.1b) mit $\tilde{\tau}^{(1)*}$, Integration über das Kugelvolumen und Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$(III.2) \quad \mathcal{R} \langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \Delta \underline{u}^{(1)} \rangle + \mathcal{R} \langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \underline{r} \cdot \tilde{\tau}^{(1)} \rangle + \mathcal{R} \langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \underline{r} \cdot \tilde{\tau}^{(1)*} \rangle - \mathcal{R} \langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \underline{\nabla} \tilde{\pi}^{(1)} \rangle \\ + \langle \tilde{\tau}^{(1)*} \Delta \tilde{\tau}^{(1)} \rangle = \underline{\sigma}^{(0)} \left[\mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \underline{u}^{(1)} \rangle + \langle \tilde{\tau}^{(1)*} \tilde{\tau}^{(1)} \rangle \right]$$

wobei die Integration über das Kugelvolumen wie oben durch spitze Klammern symbolisiert wird.

Die Differentialoperatoren, die in den linksseitigen Integralen von (III.2) enthalten sind, lassen sich durch partielle Integration auf die konjugiert komplexen Größen $\underline{u}^{(1)*}$, $\tilde{\tau}^{(1)*}$ und $\tilde{\pi}^{(1)*}$ überwälzen. Zunächst gilt, wenn $\underline{\Sigma}$ den Normalenvektor des Flächenelements $d\underline{\Sigma}$ an der Stelle $\underline{r}$ mit $|\underline{r}| = 1$ der Kugeloberfläche Σ bezeichnet:

$$\langle \underline{u}^{(1)*} \cdot \underline{\nabla} \tilde{\pi}^{(1)*} \rangle = \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^{(1)*} \tilde{\pi}^{(1)} \rangle = \int_{\Sigma} \tilde{\pi}^{(1)} \underline{u}^{(1)*} \cdot d\underline{\Sigma} = 0.$$

Dabei wurde von der Divergenzfreiheit von $\underline{u}^{(1)*}$, dem Gaußschen Satz und den in Abschnitt II formulierten Randbedingungen Gebrauch gemacht. Entsprechend zeigt man mit Hilfe des Greenschen Satzes, daß

$$\langle \tilde{\tau}^{(1)*} \Delta \tilde{\tau}^{(1)} \rangle = \langle \tilde{\tau}^{(1)*} \Delta \tilde{\tau}^{(1)*} \rangle.$$

Nicht anders verläuft der Beweis von $\langle \underline{u}^* \cdot \Delta \underline{u} \rangle = \langle \underline{u} \cdot \Delta \underline{u}^* \rangle :$

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}^* \cdot \Delta \underline{u} \rangle &= - \langle \underline{u}^* \cdot \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) \rangle = \langle \nabla \cdot [\underline{u}^* \times (\nabla \times \underline{u})] \rangle - \langle |\nabla \times \underline{u}|^2 \rangle \\ &= \int_{\Sigma} \underline{u}^* \times (\nabla \times \underline{u}) \cdot d\underline{\Sigma} - \langle |\nabla \times \underline{u}|^2 \rangle \end{aligned}$$

Für die Radialkomponente von $\underline{u}^* \times (\nabla \times \underline{u})$ errechnet man unter Ausnutzung von (II.16) und (II.17) mit $r = 1$

$$e_r \cdot \underline{u}^* \times (\nabla \times \underline{u}) = 2 \left(\underline{u}_\theta^* \underline{u}_\theta + \underline{u}_\varphi^* \underline{u}_\varphi \right) = 2 |\underline{u}|^2,$$

woraus sofort die behauptete Symmetriebeziehung folgt.

Nach Überwälzen der Differentialoperatoren geht nun

(III.2) über in

$$\begin{aligned} \text{(III.3)} \quad \mathcal{R} \langle \underline{u} \cdot \Delta \underline{u}^* \rangle + \mathcal{R} \langle r \cdot \underline{u} \tilde{\tau}^* \rangle + \mathcal{R} \langle \tilde{\tau} r \cdot \underline{u}^* \rangle - \mathcal{R} \langle \underline{u} \cdot \nabla \tilde{\pi}^* \rangle \\ + \langle \tilde{\tau} \Delta \tilde{\tau}^* \rangle = \mathcal{O}^* \left[\mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \langle \underline{u} \cdot \underline{u}^* \rangle + \langle \tilde{\tau} \tilde{\tau}^* \rangle \right]. \end{aligned}$$

Subtraktion von (III.2) und (III.3) ergibt

$$(\mathcal{O} - \mathcal{O}^*) \left[\mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \langle \underline{u}^* \cdot \underline{u} \rangle + \langle \tilde{\tau} \tilde{\tau}^* \rangle \right] = 0$$

und $\text{Im } \mathcal{O} = 0$.

Da somit (III.1) nur reelle Eigenwerte $\mathcal{O}$ zuläßt, kommen als Störungen der stationären Strömung nur solche in Frage, die in 1. Ordnung exponentiell anwachsen oder abklingen ($\mathcal{O} > 0$ oder $\mathcal{O} < 0$) oder selbst stationär sind ($\mathcal{O} = 0$). Zur Lösung des Stabilitätsproblems suchen wir zunächst zum kleinsten Eigenwert R des homogenen Anteils von (II.8), der kritischen Rayleighzahl R_k , diejenigen Lösungen von (III.1), für die $\mathcal{O} = 0$. Denn wie Chandrasekhar (1961) für das lineare homogene Problem gezeigt hat, setzt die Konvektion für $R = R_k$ mit

stationärer Strömung ein. Das bedeutet für die Anwachsrate $\overset{(0)}{\sigma}$ möglicher Störungen $\overset{(0)}{\sigma} \leq 0$. Wir fangen also mit der höchstmöglichen Anwachsrate an, die das Störungsproblem in niedrigster Ordnung zuläßt, und untersuchen dann, ob die Gleichungen (II.8) und (II.9) mit $n > 1$ positive Störungen höherer Ordnung zur Anwachsrate σ beisteuern.

Für $\overset{(0)}{\sigma} = 0$ fallen die Störungsgleichungen (III.1) und die stationären Gleichungen 1. Ordnung

$$(III.4a) \quad \Delta \underline{v}^{(1)} + \underline{r} \theta^{(1)} - \underline{v} \pi^{(1)} = 0$$

$$(III.4b) \quad \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} + \Delta \theta^{(1)} = 0$$

zusammen. Ihre Lösung geschieht auf bekannte Weise (Chandrasekhar 1961). Zunächst ergeben die Anwendung des Rotationsoperators auf (III.4a) und skalare Multiplikation mit $\underline{r}$ in der Bezeichnungsweise von (II.11) und (II.13) unter Beachtung von $\underline{r} \cdot \Delta \underline{a} = \Delta \underline{r} \cdot \underline{a}$ für ein divergenzfreies Vektorfeld $\underline{a}$:

$$\Delta \underline{r} \cdot \underline{v} \times \underline{v}^{(1)} = \Delta \underline{r} \cdot \underline{v} \times (\underline{v}_p^{(1)} + \underline{v}_T^{(1)}) = \Delta \underline{r} \cdot \underline{v} \times \underline{v}_T^{(1)} = \Delta L^2 \phi = 0.$$

Die Randbedingungen für festen und freien Rand lassen nun nur die Lösungen $\phi \equiv 0$ und d.h. $\underline{v}_T^{(1)} \equiv 0$ zu. $\underline{v}^{(1)}$ ist daher rein poloidal, das gleiche gilt für $\underline{u}^{(1)}$. Die Indizierung von $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{u}^{(1)}$ mit P und T entsprechend ihrer poloidalen und toroidalen Anteile kann von jetzt ab unterbleiben.

Wir wenden nun auf (III.4a) zweimal den Rotationsoperator an und multiplizieren skalar mit $\underline{r}$:

$$(III.5) \quad -\Delta^2 \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} + L^2 \theta^{(1)} = -\Delta^2 L^2 \psi + L^2 \theta^{(1)} = 0.$$

Anwendung von $-\Delta$ auf (III.5) und von L^2 auf (III.4b) und Addition der Ergebnisse vervollständigt die Entkopplung von (III.4):

$$(III.6a) \quad \Delta^3 \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} + \overset{(0)}{R} L^2 \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} = 0.$$

Mit dem Ansatz

$$(III.6b) \quad \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} \cong W_\ell(r) Y_\ell^m(\cos \vartheta, \varphi)$$

und den Kugelfunktionen $Y_\ell^m(\cos \vartheta, \varphi)$ in der üblichen Bezeichnungsweise separiert man in (III.6a) die Variablen und erhält für den Radialanteil $W_\ell(r)$

$$(III.7) \quad D_\ell^3 W_\ell(r) + \ell(\ell+1) \overset{(0)}{R} W_\ell(r) = 0,$$

$$D_\ell = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

und weiter, aus (III.5) mit dem Ansatz

$$1(1+1) \overset{(1)}{\theta} = F_1(r) Y_1^m(\cos \vartheta, \varphi)$$

$$(III.8) \quad D_1^2 W_1(r) = F_1(r).$$

Die Randbedingungen von Abschnitt II lauten jetzt:

$$(III.9a) \quad W_1(1) = 0$$

$$(III.9b) \quad F_1(1) = 0$$

$$(III.9c) \quad W_1'(1) = 0 \quad (\text{fester Rand})$$

$$(III.9d) \quad W_1''(1) = 0 \quad (\text{freier Rand}).$$

Wie aus der Theorie der Besselfunktionen bekannt (s.z.B. Watson 1966), läßt sich $W_1(r)$ als Lösung von (III.7)

darstellen als Linearkombination aus den sphärischen Besselfunktionen $j_1(\alpha_l e^{i\pi/3} r)$ und Neumannfunktionen $n_1(\alpha_l e^{i\pi/3} r)$, $\nu = 0, 1, 2$, $\alpha_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^6 = 1(1+1)R^{(0)}$. Da

$$|n_1(z)| \rightarrow \infty \quad \text{für } z \rightarrow 0,$$

$W_1(r)$ im Nullpunkt aber regulär sein muß, werden die Koeffizienten der n_1 in der Linearkombination für $W_1(r)$ gleich Null gesetzt. Weiterhin ist

$$j_l(\alpha_l e^{i\pi/3} r) = (-1)^l j_l^*(\alpha_l e^{2i\pi/3} r)$$

zu beachten und die Tatsache, daß die drei Funktionen $j_1(\alpha_l r)$, $\text{Re } j_1(\alpha_l e^{i\pi/3} r)$ und $\text{Im } j_1(\alpha_l e^{i\pi/3} r)$ in dem von ihnen aufgespannten Funktionenraum ein Fundamentalsystem bilden (Anhang A). Damit lautet, wenn die reellen Konstanten A, B, C zur Erfüllung von (III.9) geeignet gewählt werden, die vollständige Lösung von (III.7):

$$(III.10 a) \quad W_l(r) = A_l j_l(\alpha_l r) + B_l \{ j_l(\alpha_l e^{i\pi/3} r) + (-1)^l j_l(\alpha_l e^{2i\pi/3} r) \} \\ + C_l \{ j_l(\alpha_l e^{i\pi/3} r) - (-1)^l j_l(\alpha_l e^{2i\pi/3} r) \}$$

oder auch

$$(III.10b) \quad W_l(r) = A_l j_l(\alpha_l r) + B_l \text{Re } j_l(\alpha_l e^{i\pi/3} r) \\ + C_l \text{Im } j_l(\alpha_l e^{i\pi/3} r).$$

Mit dieser Darstellung von $W_1(r)$ gehen wir nun in (III.9) ein, das als homogenes charakteristisches Randwertproblem dann und nur dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn

$$(III.11) \quad \det \begin{pmatrix} (III.9a) \\ (III.9b) \\ (III.9c/d) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{fester/freier Rand}).$$

(III.9) und (III.11) liefern jeweils vier Gleichungen zur Bestimmung von A_1 , B_1 , C_1 und α_1 . Da A_1 , B_1 und C_1 nur bis auf einen gemeinsamen konstanten Amplitudenfaktor bestimmt sind, wählen wir von vornherein $A_1 = 1$. Die weitere Behandlung des charakteristischen Randwertproblems (III.9) und (III.11) führt zu schwerfälligen algebraischen Beziehungen zwischen den $j_1(\alpha_1 e^{i\nu\pi/3})$, $\nu = 0, 1, 2$, die sich praktisch nur numerisch auswerten lassen. Da, wie Chandrasekhar für die homogene Vollkugel gezeigt hat,

$$\stackrel{(0)}{R}_1 < R_1, \quad \text{für alle } l' > l = 1$$

und das Stabilitätsproblem daher durch den Fall $l = 1$ gegeben ist, beschränken wir uns hier auf die Wiedergabe der Ergebnisse für $l = 1$:

fester Rand

$$A_1 = 1.0$$

$$(III.12) \quad B_1 = -4.259 \cdot 10^{-4}$$

$$C_1 = -3.069 \cdot 10^{-2}$$

$$\stackrel{(0)}{R}_1 = 8.040 \cdot 10^3$$

freier Rand

$$A_1 = 1.0$$

$$(III.13) \quad B_1 = -7.982 \cdot 10^{-3}$$

$$C_1 = 2.332 \cdot 10^{-2}$$

$$\stackrel{(0)}{R}_1 = 3.091 \cdot 10^3$$

Bei der hier gewählten Entwicklung der Lösung von (III.6) nach Kugelfunktionen liegt der kritische Wert der Rayleighzahl somit bei $R_{1=1}^{(0)}$, im folgenden nur noch als $R^{(0)}$ bezeichnet. Wird dieser Wert, von kleineren, unterkritischen Rayleighzahlen her kommend, in der Kugel geringfügig überschritten, werden lediglich in (III.6a) die Modi mit $l = 1$ angeregt, also mit $m = 0, \pm 1$. Ihr Stabilitätsverhalten gilt es im folgenden zu untersuchen. Insbesondere ist zu klären, inwieweit die dreifache Entartung des Eigenwerts R durch Glieder höherer Ordnung in σ aufgehoben wird. Busse (1975) hat in diesem Zusammenhang bereits darauf hingewiesen, daß durch eine geeignete Drehung des zugrundeliegenden Koordinatensystems die allgemeine Lösung von (III.6a)

$$\underline{r \cdot v}^{(1)} = w_{l=1} \sum_{m=-1}^{+1} \beta_m y_{l=1}^m (\cos \vartheta, \varphi)$$

immer in die axialsymmetrische Lösung mit $\beta_{-1} = \beta_{+1} = 0$ überführt werden kann. Wir machen uns diesen Sachverhalt zunutze und wählen unser Koordinatensystem derart, daß in geeigneter Normierung die allgemeine Lösung von (III.6a) lautet:

$$(III.14) \quad \underline{r \cdot v}^{(1)} = w_{l=1}(r) \cos \vartheta.$$

Die Störungen $\underline{u}^{(1)}$ der stationären Lösung (III.14) berechnen sich nun zwar nach (III.1) mit $\vartheta = 0$ grundsätzlich wie $\underline{v}^{(1)}$, doch müssen wir alle möglichen Störungen zulassen, auch die, die gegenüber der axialsymmetrischen Lösung (III.14) in dem nun festliegenden Koordinatensystem beliebig gedreht sind. Die Radialkomponente von $\underline{u}^{(1)}$ ist daher anzusetzen mit

$$(III.15a) \quad \underline{r \cdot u}^{(1)} = w_{l=1}(r) \sum_{m=-1}^{+1} \beta_m y_{l=1}^m (\cos \vartheta, \varphi),$$

wobei wir die Werte der Koeffizienten β_m zunächst offen-

lassen, und - siehe (III.8) -

$$(III.15b) \quad \tilde{r}^{(1)} = \frac{1}{2} F_{\ell=1}(r) \sum_{m=-1}^{+1} \mathcal{S}_m Y_{\ell=1}^m$$

Zur vollständigen Beschreibung der Lösung des homogenen Problems fehlen jetzt nur noch die Winkelkomponenten von $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{u}^{(1)}$. Aus (II.10), (III.14) und (III.15) erhält man

$$(III.16a) \quad \underline{v}^{(1)} = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times (r \cdot \underline{v}^{(1)}) \underline{r} \right)$$

$$(III.16b) \quad \underline{u}^{(1)} = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times (r \cdot \underline{u}^{(1)}) \underline{r} \right),$$

d.h.

$$\underline{v}_r^{(1)} = \frac{W_{\ell=1}}{r} \cos \vartheta$$

$$(III.17a) \quad \underline{v}_\vartheta^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d r W_{\ell=1}}{dr} \sin \vartheta$$

$$\underline{v}_\varphi^{(1)} \equiv 0$$

und

$$\underline{u}_r^{(1)} = \frac{W_{\ell=1}}{r} \sum_{m=-1}^{+1} \mathcal{S}_m Y_{\ell=1}^m$$

$$(III.17b) \quad \underline{u}_\vartheta^{(1)} = \frac{1}{2r} \frac{d r W_{\ell=1}}{dr} \sum_{m=-1}^{+1} \mathcal{S}_m \partial_\vartheta Y_{\ell=1}^m$$

$$\underline{u}_\varphi^{(1)} = \frac{1}{2r \sin \vartheta} \frac{d r W_{\ell=1}}{dr} \sum_{m=-1}^{+1} \mathcal{S}_m \partial_\varphi Y_{\ell=1}^m.$$

IV. Die Gleichungen 2. Ordnung

Aus (II.8) und (II.9) ergeben sich mit $n=2$ die stationären und die Störungsgleichungen 2.Ordnung :

$$(IV.1a) \quad \Delta \underline{v}^{(2)} + \underline{r} \theta^{(2)} - \underline{v} \Pi^{(2)} = \mathcal{P}^{-1} (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{v}$$

$$(IV.1b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} + \Delta \theta^{(2)} = \underline{v} \cdot \underline{v} \theta^{(1)}$$

$$(IV.2a) \quad \Delta \underline{u}^{(2)} + \underline{r} \tau^{(2)} - \underline{v} \Pi^{(2)} = \mathcal{P}^{-1} [(\underline{u} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{v} + (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{u} + \sigma \underline{u}^{(1)}]$$

$$(IV.2b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{u}^{(2)} + \Delta \tau^{(2)} = \underline{v} \cdot \underline{v} \tau^{(1)} + \underline{u} \cdot \underline{v} \theta^{(1)} - \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{u}^{(1)} + \sigma \tau^{(1)}$$

Nach einem bekannten Satz aus der Funktionalanalysis besitzen (IV.1) und (IV.2) dann und nur dann eine Lösung, wenn die rechten Seiten (Inhomogenitäten) orthogonal sind zu den Lösungen des adjungierten homogenen Systems. Diese Lösbarkeitsbedingung legt die Eigenwerte $\mathcal{R}$ und σ fest: Multiplikation von (IV.1a) mit $\mathcal{R} \underline{v}^{(1)*} = \mathcal{R} \underline{v}^{(1)}$ und (IV.1b) mit $\theta^{(1)*} = \theta^{(1)}$, Mittelung über das Kugelvolumen, Addition und partielle Integration wie gehabt bringen die linken Seiten zum Verschwinden. Es bleibt

$$\mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{v} \rangle + \langle \theta^{(1)} \underline{v} \cdot \underline{v} \theta^{(1)} \rangle - \mathcal{R} \langle \theta^{(1)} \underline{r} \cdot \underline{v} \rangle = 0.$$

Aus $\underline{v} \cdot \underline{v}^{(1)} = 0$ folgt

$$\langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{v} \rangle = \frac{1}{2} \langle (\underline{v} \cdot \underline{v})^{(1)} \underline{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{v} \cdot \underline{v} \underline{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \underline{v}^2 \underline{v} \cdot d\underline{\Sigma} = 0,$$

da die Radialkomponente von $\underline{v}(\Sigma)$ verschwindet. Entsprechend zeigt man

$$\langle \theta^{(1)} \underline{r} \cdot \underline{v} \theta^{(1)} \rangle = 0,$$

und wegen (III.4):

$$0 = \mathcal{R} \langle \theta^{(1)} \underline{r} \cdot \underline{v} \rangle = - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} \langle \theta \Delta \theta \rangle = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} \langle (\underline{v} \theta)^{(1)} \rangle$$

mit dem Ergebnis, daß

$$\begin{matrix} (1) \\ R = 0. \end{matrix}$$

Wir behandeln jetzt (IV.2) auf analoge Weise und erhalten

$$\sigma^{(1)} \left[\mathcal{R} P^{-1} \langle \underline{u}^* \cdot \underline{u} \rangle + \langle \underline{z} \underline{z}^* \rangle \right] = 0,$$

$$\sigma^{(1)} = 0.$$

Die Eigenwertstörungen 1. Ordnung liefern somit keine Beiträge, und zur Entscheidung des Stabilitätsproblems müssen wir zu den Gleichungen nächsthöherer Ordnung übergehen. Dazu ist es notwendig, (IV.1) und (IV.2) explizit zu lösen. Zunächst halten wir fest, daß mit $\underline{v}^{(1)}$ und $\underline{\theta}^{(1)}$ auch alle übrigen Lösungen $\underline{v}^{(n)}$ und $\underline{\theta}^{(n)}$ von (II.8) mit $n > 1$ von der Variablen φ unabhängig sind. Da die Stabilitätsgleichungen linear in den Störungsgrößen $\underline{u}$ und $\underline{z}$ sind und ihre Koeffizienten $\underline{v}$ und $\underline{\theta}$ von φ nicht abhängen, wird es möglich, die φ -Abhängigkeit auch aus den Stabilitätsgleichungen ganz zu eliminieren. Denn erstens folgt unmittelbar aus (II.9), daß die φ -Abhängigkeit nicht nur von $\underline{u}^{(1)}$ und $\underline{z}^{(1)}$, sondern auch von allen weiteren Lösungen mit $n > 1$ ausschließlich durch $e^{im\varphi}$ bzw. eine Linearkombination von $Y_{1 \geq 1}^m$, $m = 0, \pm 1$, gegeben ist. Und zweitens läßt sich jetzt in (II.9) in jeder Ordnung n jede Einzelkomponente von $\underline{u}^{(n)}$ und $\underline{z}^{(n)}$ mit irgendeinem der $m = 0, \pm 1$ gesondert behandeln. Zu diesem Zweck substituieren wir

$$\underline{u}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \underline{u}_m(r, \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\underline{z}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \underline{z}_m(r, \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\tilde{\pi}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \tilde{u}_m(r, \vartheta) e^{im\varphi},$$

gehen damit in (II.9) ein, führen die Differentiationen nach φ aus und kürzen durch $e^{im\varphi}$. Auf der linken Seite von (II.9) tritt somit durchwegs der komplexe Skalar im an die Stelle von ∂_φ . Wir schreiben

$$\Delta_m = \partial_{rr} + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} L_m^2 = \partial_{rr} + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\vartheta \sin^2 \vartheta \partial_\vartheta - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right]$$

und

$$\nabla_m = \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\vartheta, \frac{im}{r \sin \vartheta} \right)$$

und erhalten damit (II.9) in φ -unabhängiger Form:

$$(IV.3a) \quad \Delta_m \underline{u}_m^{(n)} + r \tilde{\tau}_m^{(n)} - \nabla_m \tilde{\pi}_m^{(n)} = P^{-1} \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})^{(\nu)} \underline{u}_m^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (\underline{u}_m \cdot \underline{\nabla})^{(\nu)} \underline{v} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_m^{(\nu)} \underline{u}_m^{(n-\nu)} \right]$$

$$(IV.3b) \quad \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{u}_m^{(n)} + \Delta_m \tilde{\tau}_m^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})^{(\nu)} \underline{v} \tilde{\tau}_m^{(n-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \underline{u}_m \cdot \underline{\nabla}^{(\nu)} \theta + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_m^{(\nu)} \tilde{\tau}_m^{(n-\nu)} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{u}_m^{(n-\nu)}$$

$$(IV.3c) \quad \nabla_m \cdot \underline{u}_m^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

In der neuen Formulierung (IV.3) der Stabilitätsgleichungen (II.9) lautet (IV.2) für $m = 0$ und $\overset{(1)}{R} = \overset{(1)}{\sigma} = 0$:

$$(IV.4a) \quad \Delta_0 \underline{u}_0^{(2)} + r \tilde{\tau}_0^{(2)} - \nabla_0 \tilde{\pi}_0^{(2)} = 2 P^{-1} (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})^{(1)} \underline{v}$$

$$(IV.4b) \quad \overset{(0)}{R} \underline{r} \cdot \underline{u}_0^{(2)} + \Delta_0 \tilde{\tau}_0^{(2)} = 2 \underline{v} \cdot \underline{\nabla}^{(1)} \theta,$$

denn $\underline{u}_0^{(1)} = \underline{v}$ und $\tilde{\tau}_0^{(1)} = \theta$. Die Lösungen von (IV.4) hängen nun in einfacher Weise von den Lösungen von (IV.1) ab:

$$\underline{u}_0^{(2)} = 2 \underline{v}^{(2)}, \quad \tilde{\tau}_0^{(2)} = 2 \theta^{(2)}.$$

Zur weiteren Behandlung von (IV.1) und (IV.2) führen wir Abkürzungen für die inhomogenen rechten Seiten ein:

$$(IV.5a) \quad \Delta \underline{v}^{(2)} + \underline{r} \theta^{(2)} - \underline{\nabla} \pi^{(2)} = \mathcal{P}^{-1} \underline{J}_1$$

$$(IV.5b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} + \Delta \theta^{(2)} = \underline{J}_2$$

$$(IV.6a) \quad \Delta_m \underline{u}_m^{(2)} + \underline{r} \tilde{\tau}_m^{(2)} - \underline{\nabla}_m \pi_m^{(2)} = \mathcal{P}^{-1} \underline{K}_m$$

$$(IV.6b) \quad \mathcal{R} \underline{r} \cdot \underline{u}_m^{(2)} + \Delta_m \tilde{\tau}_m^{(2)} = \underline{K}'_m$$

mit $\underline{K}_0 = 2 \cdot \underline{I}_1$ und $\underline{K}'_0 = 2 \cdot \underline{I}_2$. Da, wie sich leicht zeigen läßt,

$$\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{J}_1 = 0$$

schließt man wie oben im Fall $\underline{v}^{(1)}$ auch hier auf rein poloidales $\underline{v}^{(2)}$ und $\underline{u}_0^{(2)}$. Auch die Entkopplung von (IV.5) und (IV.6) geschieht wie im Fall der homogenen Gleichungen. Es ist dabei lediglich zu beachten, daß man für (IV.6) die mit m indizierten Operatoren Rotation, Δ_m und $\underline{L}_m^2$ zu benutzen hat und daß für ein beliebiges Vektorfeld $\underline{a}$ die Identität

$$(IV.7) \quad \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{a}) = (2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \cdot \underline{a} - \Delta \underline{r} \cdot \underline{a}$$

und die analoge Beziehung für die indizierten Operatoren gilt. Die entkoppelten Gleichungen für die Radialkomponenten der Geschwindigkeiten und die Temperaturen θ und τ lauten dann:

$$(IV.8a) \quad \Delta^3 \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} + \mathcal{R} \underline{L}^2 \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} = \underline{L}^2 \underline{J}_2 - \mathcal{P}^{-1} \Delta [(2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_1 - \Delta \underline{r} \cdot \underline{J}_1]$$

$$(IV.8b) \quad \Delta^3 \theta^{(2)} + \mathcal{R} \underline{L}^2 \theta^{(2)} = \Delta^2 \underline{J}_2 + \mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} [(2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_1 - \Delta \underline{r} \cdot \underline{J}_1]$$

$$(IV.9a) \quad \Delta_m^3 \underline{r} \cdot \underline{u}_m^{(2)} + \mathcal{R} \underline{L}_m^2 \underline{r} \cdot \underline{u}_m^{(2)} = \underline{L}_m^2 \underline{K}'_m - \mathcal{P}^{-1} \Delta_m [(2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}_m) \underline{\nabla}_m \cdot \underline{K}_m - \Delta_m \underline{r} \cdot \underline{K}_m]$$

$$(IV.9b) \quad \Delta_m^2 \underline{z}_m^{(2)} + \underline{R} L_m^2 \underline{z}_m^{(2)} = \Delta_m^2 K_m' + \underline{R} P^{-1} [(2 + \underline{r} \cdot \underline{v}_m) \underline{v} \cdot \underline{K}_m - \Delta_m \underline{r} \cdot \underline{K}_m],$$

und als Gleichung für den Toroidalanteil von $\underline{u}_m^{(2)}$

$$(IV.9c) \quad \Delta_m \underline{r} \cdot \underline{v}_m \times \underline{u}_m^{(2)} = P^{-1} \underline{r} \cdot \underline{v}_m \times \underline{K}_m.$$

Bei der expliziten Berechnung der Inhomogenitäten von (IV.8) und (IV.9) zeigen diese folgende Eigenschaften, die für die Integration der Gleichungen wesentlich sind:

1. $\underline{r} \cdot \underline{v}_m \times \underline{K}_m = 0$ auch für $m = \pm 1$, d.h. $\underline{u}_m^{(2)}$ ist rein poloidal für alle m , die in Frage kommen.

2. Die Winkelabhängigkeit läßt sich Term für Term jeweils durch eines der modifizierten Legendreschen Polynome $P_l^m(\cos \theta)$ ("zugeordnete Kugelfunktionen") mit $l = 0, 2$ und $m = 0, 1$ ausdrücken (Bezeichnungsweise und Normierung nach Eder (1968)).

3. Die Unterscheidung von $m = -1$ und $m = +1$ kann bei der Behandlung von (IV.9) unterbleiben. Es gilt

$$\underline{r} \cdot \underline{u}_{-1}^{(2)} = \underline{r} \cdot \underline{u}_{+1}^{(2)},$$

und beide können gleichermaßen nach $P_l^{m=1}(\cos \theta)$, $l = 0, 2$ entwickelt werden. Nach (III.17b) unterscheiden sich $\underline{u}_{+1}^{(2)}$ und $\underline{u}_{-1}^{(2)}$ nur hinsichtlich ihrer φ -Komponenten, und es gilt

$$\underline{u}_{\varphi+1}^{(2)} = -\underline{u}_{\varphi-1}^{(2)} = -\underline{u}_{\varphi 1}^{(2)*}.$$

4. Mit den Ansätzen

$$(IV.10a) \quad \underline{r} \cdot \underline{v} = \psi_0^{(2)}(r) P_{\ell=0}^{m=0} + \psi_2^{(2)}(r) P_{\ell=2}^{m=0}$$

$$(IV.10b) \quad \theta = \xi_0^{(2)}(r) P_{\ell=0}^{m=0} + \xi_2^{(2)}(r) P_{\ell=2}^{m=0}$$

$$(IV.11a) \quad \underline{r} \cdot \underline{u}_1^{(2)} = \varphi_2^{(2)}(r) P_{\ell=2}^{m=1}$$

$$(IV.11b) \quad \underline{r}_1^{(2)} = \eta_2^{(2)}(r) P_{\ell=2}^{m=1}$$

wird die Separation der Variablen möglich. Mit den Abkürzungen

$$W(r) = W_{\ell=1}^{(2)}(r)$$

$$\tilde{W}(r) = D_{\ell=1} W(r)$$

$$\tilde{\tilde{W}}(r) = D_{\ell=1}^2 W(r)$$

und, wie oben,

$$D_1 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

erhält man die inhomogenen Gleichungen für die Radialanteile Ψ, ξ, η und φ

$$(IV.12a) \quad D_{\ell=0}^3 \Psi_0^{(2)} = 0$$

$$(IV.12b) \quad (D_{\ell=2}^3 + 6R) \Psi_2^{(2)} = 2 \frac{\tilde{W}\tilde{W}'}{r} - \frac{\tilde{\tilde{W}}}{r^2} (rW)' + P^{-1} D_{\ell=2} [W\tilde{W} + rW\tilde{W}']$$

$$(IV.13a) \quad D_{\ell=0}^3 \xi_0^{(2)} = \frac{1}{6} D_{\ell=0}^2 \frac{1}{r^2} (rW\tilde{\tilde{W}})'$$

$$\text{bzw.} \quad D_{\ell=0}^3 \xi_0^{(2)} = \frac{1}{6r^2} (rW\tilde{\tilde{W}})'$$

$$(IV.13b) \quad (D_{\ell=2}^3 + 6R) \xi_2^{(2)} = \frac{1}{3} D_{\ell=2}^2 \left\{ \frac{W\tilde{W}'}{r} - \frac{\tilde{\tilde{W}}}{r^2} (rW)' \right\} - R P^{-1} W(r\tilde{W})'$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\eta_2^{(2)}(r)$ und $\varphi_2^{(2)}(r)$ zeigen unmittelbar, daß

$$\eta_2^{(2)}(r) = \xi_2^{(2)}(r), \quad \varphi_2^{(2)}(r) = \Psi_2^{(2)}(r).$$

Die Randbedingungen für eine freie oder feste Kugel-

oberfläche lassen als Lösung von (IV.12a) nur

$$\stackrel{(2)}{\Psi}_0(r) \equiv 0$$

zu. (IV.13a) läßt sich direkt integrieren. Das noch unbestimmte Integral lautet:

$$(IV.14) \quad \stackrel{(2)}{\xi}_0(r) = \frac{1}{6} \int \frac{\tilde{W}\tilde{W}}{r} dr$$

Wir vermerken noch folgende Beziehungen zwischen (IV.12b) und (IV.13b), die das Analogon zu den noch nicht entkoppelten Gleichungen (IV.5) und (IV.6) darstellen:

$$(IV.15) \quad \mathcal{D}_{l=2} \stackrel{(2)}{\xi}_2 + \mathcal{R} \stackrel{(2)}{\Psi}_2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\tilde{W}\tilde{W}'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{W}}{r} (r\tilde{W})' \right\}$$

$$(IV.16) \quad \mathcal{D}_{l=2}^2 \stackrel{(2)}{\Psi}_2 - 6 \stackrel{(2)}{\xi}_2 = \mathcal{P}^{-1} \{ W\tilde{W} + r W\tilde{W}' \}$$

Bemerkenswert ist hier zudem eine Analogie zur Stabilitätsrechnung für die ebene Schicht. Lortz (1961) hat gezeigt, daß die Temperaturstörung 2. Ordnung im Fall der ebenen Schicht einen nur von der vertikalen z -Richtung abhängigen Anteil besitzt, während der entsprechende Term für die Radialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit identisch verschwindet. Entsprechendes gilt für $\stackrel{(2)}{\xi}_0(r)$ und $\stackrel{(2)}{\Psi}_0(r)$. Hier zeigt sich anhand einer kleinen analytischen Sonderheit, was in Abschnitt V eingehender zu diskutieren sein wird, daß sich beim Übergang vom ebenen zum sphärischen Stabilitätsproblem viele seiner mathematischen und physikalischen Strukturmerkmale in direkter Analogie übertragen. Das dürfte in noch größerem Umfang auf Kugelschalen zutreffen, die sich von der ebenen Schicht weniger stark unterscheiden als die Vollkugel.

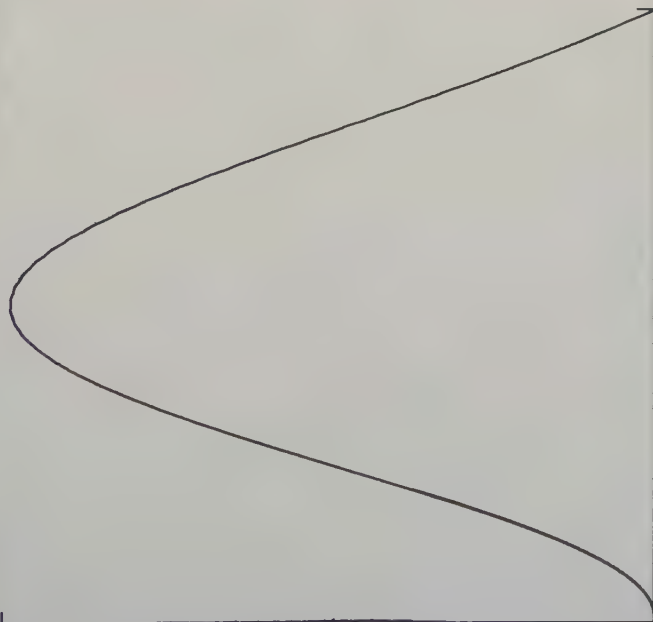
Schließlich stellen wir noch fest, daß die in Abschnitt

II gestellte Bedingung $\langle \overset{(1)}{\theta} \overset{(n)}{\underline{r} \cdot \underline{v}} \rangle = 0$ bei der gegebenen Winkelabhängigkeit von $\overset{(1)}{\theta}$ und $\underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)}$ im Fall $n = 2$ erfüllt ist.

Es sind nun für die Gleichungen (IV.12) und (IV.13) spezielle Lösungen des inhomogenen Problems anzugeben und diese durch Hinzufügen geeigneter Lösungen des homogenen Problems den Randbedingungen anzupassen. In Anhang B wird gezeigt, wie man solche speziellen Lösungen der inhomogenen Gleichungen in analytischer Form darstellen kann. Für die in (IV.12) und (IV.13) enthaltenen Inhomogenitäten wurden die Funktionswerte der speziellen Lösungen - jeweils getrennt nach zu P^{-1} proportionalen und von P unabhängigen Anteilen - numerisch berechnet und den Randbedingungen angepaßt. Das Ergebnis ist in den Abbildungen 1 bis 4 auf Seite 31 bis 34 graphisch dargestellt.

TEMPERATUR

22.0



-0.0

0.0

1.0

0.0

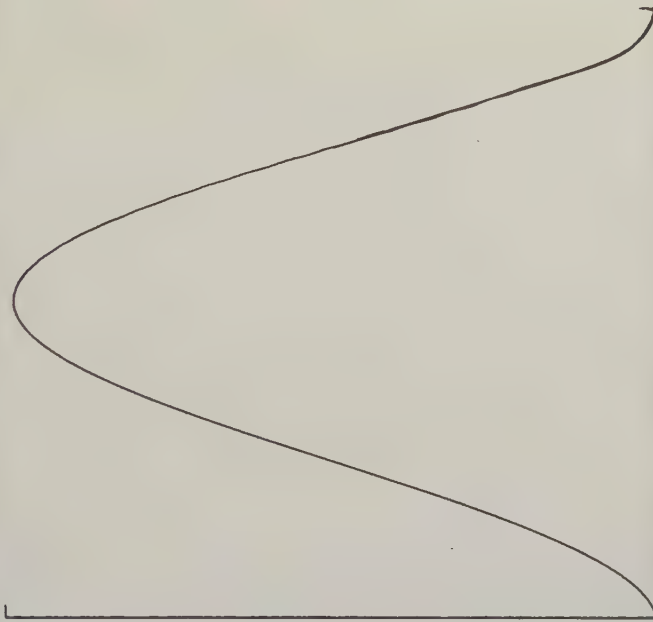
1.0

-0.000

Abbildung 1

RADIALGESCHWINDIGKEIT

0.076



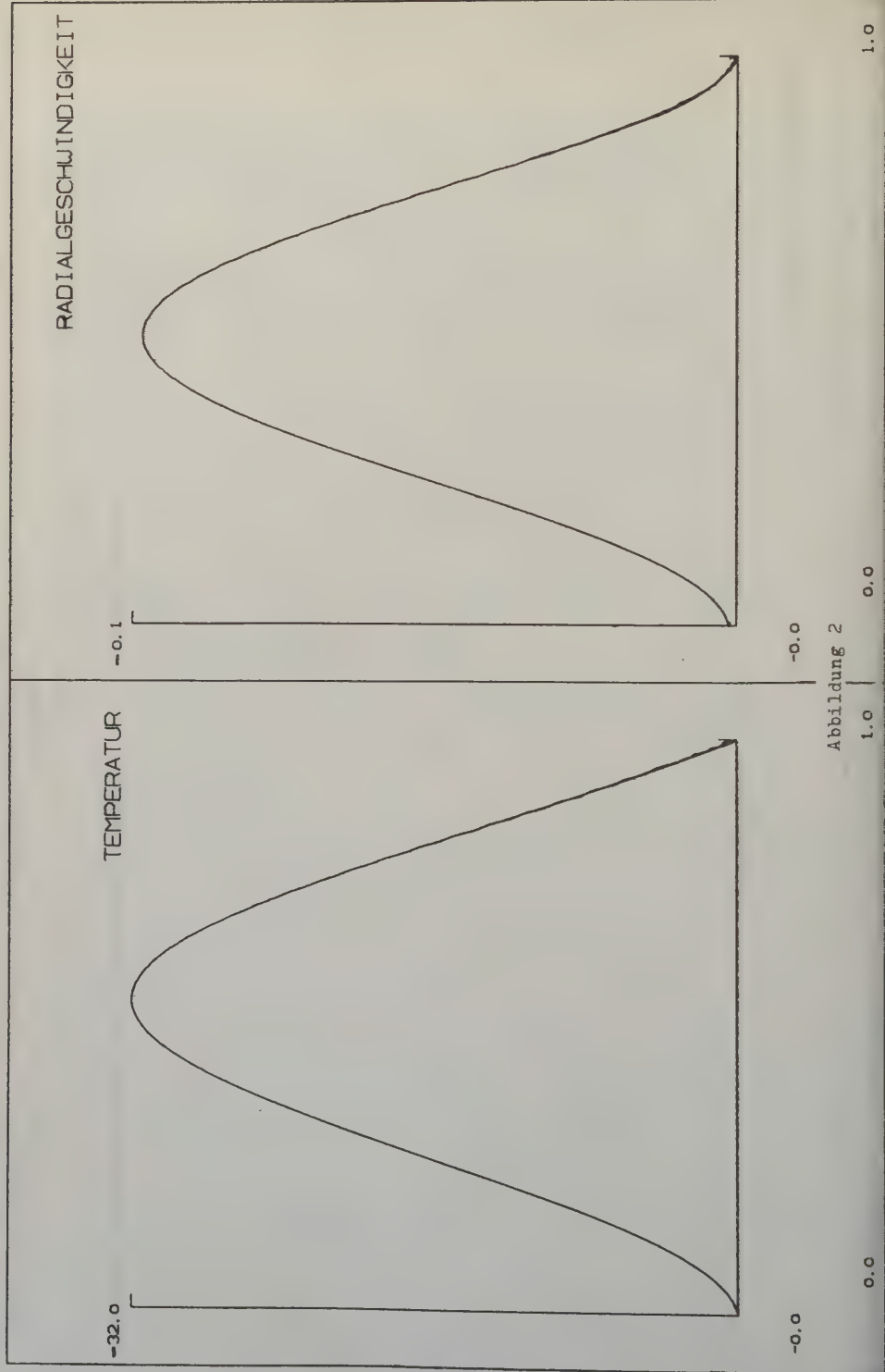
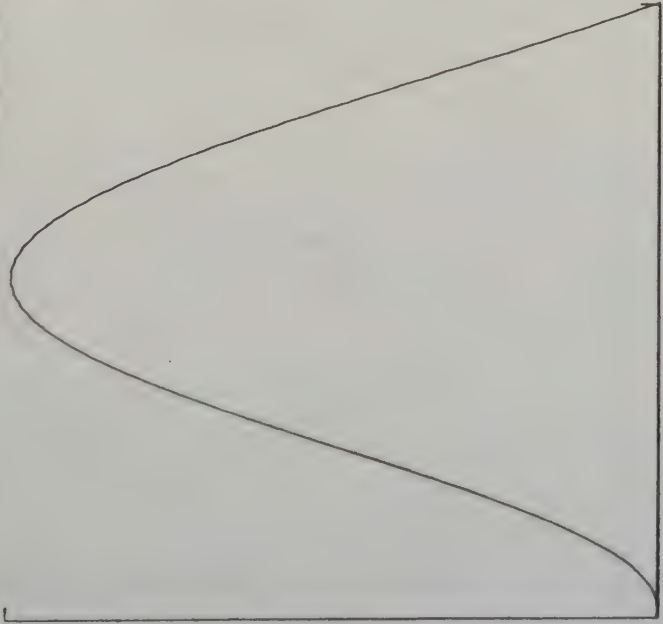


Abbildung 2

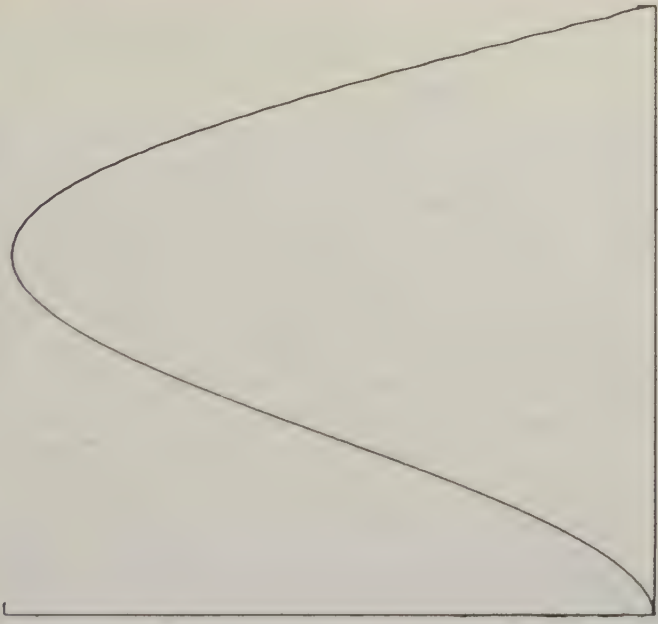
8.9

TEMPERATUR



0.054

RADIALGESCHWINDIGKEIT



-0.0

0.000

Abbildung 3

0.0

1.0

0.0

1.0

FREIER RAND - LOESUNG PROPORTIONAL 1/P

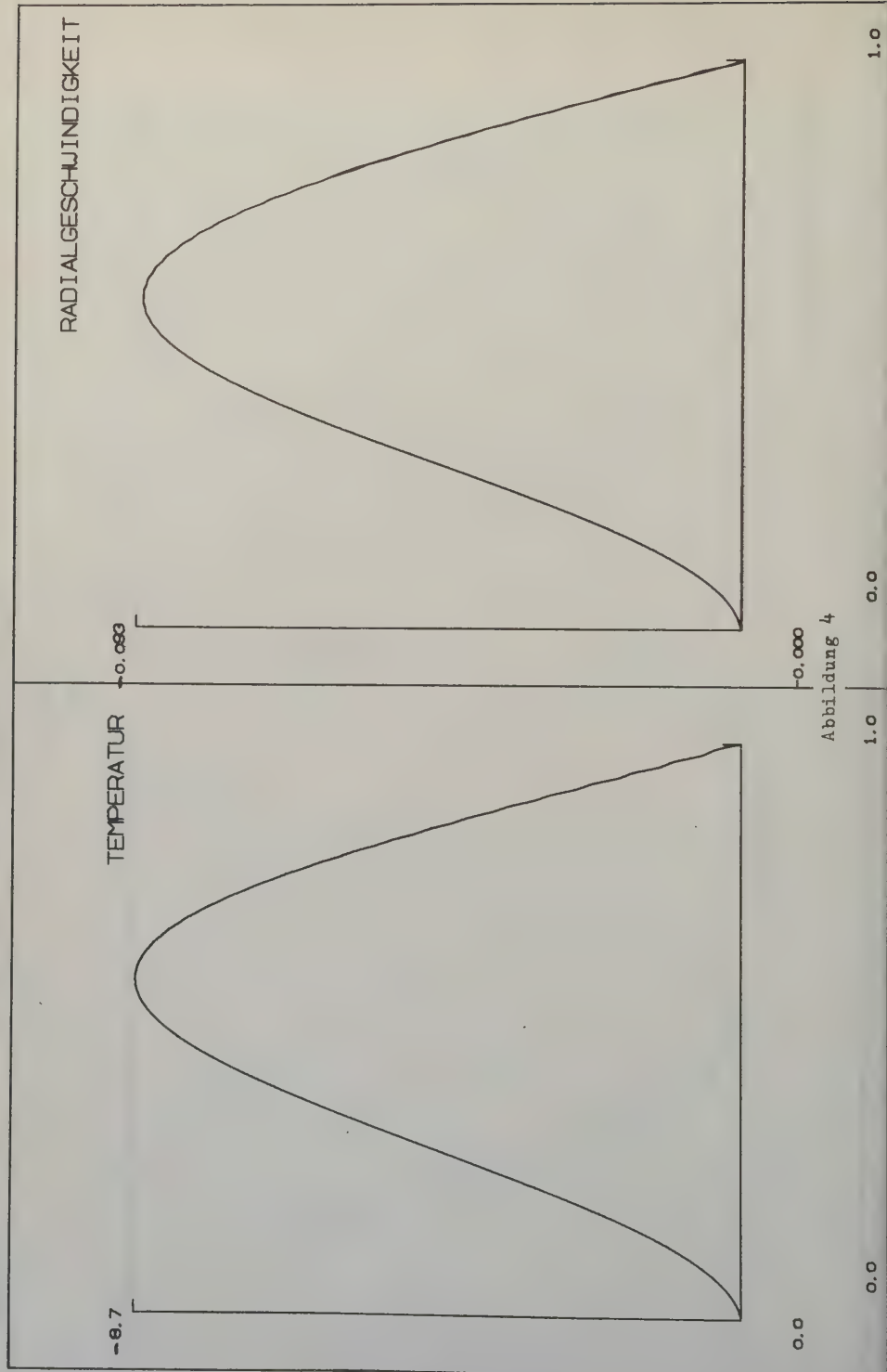


Abbildung 4

V. Die Eigenwertstörungen 2. Ordnung

Mit den in Abschnitt IV konstruierten Lösungen der Gleichungen 2. Ordnung gehen wir nun in das Lösungssystem 3. Ordnung ein und berechnen aus der Lösbarkeitsbedingung die Eigenwertstörungen $R^{(2)}$ und $\sigma^{(2)}$. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (II.8) für $n = 3$ auf die bekannte Weise mit $R^{(0)} \underline{v}$ und $\theta^{(1)}$, (IV.3) mit $R^{(0)} \underline{u}_m^*$ und $\underline{v}_m^*$, mitteln über das Kugelvolumen, wälzen die Differentialoperatoren über und bringen so die linken Seiten zum Verschwinden. Es bleiben die Bestimmungsgleichungen für $R^{(2)}$ und $\sigma^{(2)}$

$$(V.1) \quad -R^{(2)} \langle \theta^{(1)} \underline{r} \cdot \underline{v} \rangle + \langle \theta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \theta^{(1)} \rangle + \langle \theta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \theta^{(2)} \rangle + R^{(0)} P^{-1} \{ \langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \rangle + \langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}^{(2)} \rangle \} = 0$$

$$(V.2) \quad -R^{(2)} \langle \underline{v}_m \underline{r} \cdot \underline{u}_m \rangle + \sigma_m^{(2)} \{ \langle \underline{v}_m^2 \rangle + R^{(0)} P^{-1} \langle \underline{u}_m^* \underline{u}_m \rangle \} + \langle \underline{v}_m^{(1)} [\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}_m^{(2)} + \underline{u}_m \cdot \nabla \theta^{(2)} + \underline{u}_m \cdot \nabla \theta^{(1)}] \rangle + R^{(0)} P^{-1} \langle \underline{u}_m^* [(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{u}_m^{(2)} + (\underline{u}_m \cdot \nabla) \underline{v}^{(2)} + (\underline{u}_m \cdot \nabla) \underline{v}^{(1)}] \rangle = 0$$

Der 2. und 4. Term in (V.1) verschwinden, desgleichen diejenigen Terme in (V.2), die für $m = 0$ wegen

$$(V.3) \quad \underline{v}_0^* = \underline{v}_0 = \theta^{(1)}, \quad \underline{v}_0^{(2)} = 2\theta^{(2)} \\ \underline{u}_0^* = \underline{u}_0 = \underline{v}, \quad \underline{u}_0^{(2)} = 2\underline{v}$$

zu ihnen proportional sind:

$$\langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \rangle = \frac{1}{2} \langle (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \int \underline{v} \cdot \underline{v} \cdot d\underline{\Sigma} = 0 \\ \langle \theta^{(1)} \underline{v} \cdot \nabla \theta^{(1)} \rangle = \frac{1}{2} \int \theta^{(1)2} \underline{v} \cdot d\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma} \cdot 0.$$

Wir vermerken noch die Relationen

$$\langle \overset{(1)}{\theta} \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \overset{(2)}{\theta} \rangle = - \langle \overset{(2)}{\theta} \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \overset{(1)}{\theta} \rangle, \quad \langle \overset{(1)}{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla) \overset{(2)}{v} \rangle = - \langle \overset{(2)}{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla) \overset{(1)}{v} \rangle$$

und erhalten aus (V.1) und (V.2)

$$(V.4) \quad \overset{(2)}{R} \langle \overset{(1)}{\theta} \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \overset{(2)}{\theta} \rangle = \langle \overset{(1)}{\theta} \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \overset{(2)}{\theta} \rangle + \overset{(0)}{R} P^{-1} \langle \overset{(1)}{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla) \overset{(2)}{v} \rangle$$

und

$$(V.5) \quad \left\{ \langle \overset{(1)}{v}^2 \rangle + \overset{(0)}{R} P^{-1} \langle \overset{(1)}{u}_0^2 \rangle \right\} \overset{(2)}{\sigma}_0 = \overset{(2)}{R} \langle \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \cdot \overset{(1)}{u}_0 \rangle - \langle \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \overset{(2)}{\theta} + \overset{(1)}{u}_0 \cdot \nabla \overset{(2)}{\theta} \rangle - \overset{(0)}{R} P^{-1} \langle \overset{(1)}{u}_0 \cdot [(\nabla \cdot \nabla) \overset{(2)}{u}_0 + (\overset{(1)}{u}_0 \cdot \nabla) \overset{(2)}{v}] \rangle$$

Wir beachten (V.3) und setzen (V.4) in (V.5) ein. Dann ergibt sich zwischen $\overset{(2)}{R}$ und $\overset{(2)}{\sigma}_0$ eine Beziehung

$$(V.6) \quad \frac{1}{2} \left\{ \langle \overset{(1)}{\theta}^2 \rangle + \overset{(0)}{R} P^{-1} \langle \overset{(1)}{v}^2 \rangle \right\} \overset{(2)}{\sigma}_0 = - \overset{(2)}{R} \langle \overset{(1)}{\theta} \overset{(1)}{v} \cdot \nabla \rangle = \overset{(2)}{R} \langle \overset{(1)}{\theta} \Delta \theta \rangle = - \frac{\overset{(2)}{R}}{\overset{(0)}{R}} \langle (\nabla \theta)^2 \rangle$$

die zeigt, daß, wenn R für alle $P > 0$ positiv definit ist, $\overset{(2)}{\sigma}_0 < 0$ und somit die stationäre Strömung stabil ist gegenüber achsialsymmetrischen Störungen ($m = 0$) bis einschließlich der 2. Ordnung.

Die Integrale in (V.4) wurden durch Einsetzen der in den vorhergehenden Abschnitten konstruierten Lösungen $\overset{(n)}{v}$ und $\overset{(n)}{\theta}$, $n = 1, 2$, numerisch berechnet und nach Potenzen von P^{-1} geordnet. $\overset{(2)}{R}$ ergab sich als Polynom 2. Grades in P^{-1}

$$(V.7) \quad \overset{(2)}{R} = a_0 + a_1 P^{-1} + a_2 P^{-2},$$

wobei die Koeffizienten a durch

$$a_0 = 928.7 \quad (\text{fester Rand})$$

$$a_1 = -1006.6$$

$$a_2 = 711.0$$

bzw.

$$a_0 = 276.5$$

$$a_1 = -163.8 \quad (\text{freier Rand})$$

$$a_2 = 76.6$$

und Γ durch

$$\Gamma = \frac{1}{\pi R} \langle (\nabla \theta)^2 \rangle$$

gegeben sind. Es ist $R > 0$, und das Stabilitätskriterium $\sigma_{m=0}^{(2)} < 0$ ist erfüllt. Außerdem gilt nach Abschnitt III

$$\underline{r} \cdot \underline{v} = W(r) \cos \vartheta$$

$$\theta = \frac{1}{2} \widetilde{W}(r) \cos \vartheta$$

$$\underline{r} \cdot \underline{u}_m = W(r) \sin \vartheta$$

$$\tau_m = \frac{1}{2} \widetilde{W}(r) \sin \vartheta, \quad m = \pm 1,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, daß

$$\langle \tau_m \underline{r} \cdot \underline{u} \rangle = 2 \langle \theta \underline{r} \cdot \underline{v} \rangle, \quad m = \pm 1.$$

Unter Ausnutzung von (V.4) erhält man damit aus

(V.2) für $m = \pm 1$

$$\begin{aligned} (V.8) \quad \{ \langle \tau_m^2 \rangle + \mathcal{R} P^{-1} \langle \underline{u}_m^* \cdot \underline{u}_m \rangle \} \sigma_m^{(2)} &= 2 \langle \theta \underline{v} \cdot \nabla \theta \rangle + 2 \mathcal{R} P^{-1} \langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \rangle \\ &- \langle \tau_m [\underline{v} \cdot \nabla \tau_m + \underline{u}_m \cdot \nabla \theta + \underline{u}_m \cdot \nabla \theta] \rangle - \mathcal{R} P^{-1} \langle \underline{u}_m^* [\underline{v} \cdot \nabla \underline{u}_m \\ &+ (\underline{u}_m \cdot \nabla) \underline{v} + (\underline{u}_m \cdot \nabla) \underline{v}] \rangle \end{aligned}$$

Setzt man jetzt in (V.8) die verschiedenen Funktionen $\underline{v}$, $\underline{u}$, θ und $\underline{z}$ ein und führt die Winkelintegrationen aus, erhält man nach einer stellenweise etwas mühsamen Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} \langle \theta \underline{v} \cdot \underline{v} \theta \rangle + \mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \langle \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{v} \rangle &= \frac{\pi}{9} \int_0^1 (w \tilde{w})^2 dr \\ &+ \frac{2\pi}{15} \int_0^1 \xi_2^{(2)}(r) [w \tilde{w} + r w' \tilde{w} - 2 r w \tilde{w}'] dr + \mathcal{R} \mathcal{P}^{-1} \int_0^1 \psi_2^{(2)}(r) \left[\frac{2\pi}{15} (r \tilde{w})' w - \frac{4\pi}{15} w \tilde{w}' \right] dr \\ \langle \tilde{z}_m^{(1)} [\underline{v} \cdot \underline{v} \tilde{z}_m^{(2)} + \underline{u}_m \cdot \underline{v} \theta + \underline{u}_m \cdot \underline{v} \theta] \rangle &= \\ &\frac{2\pi}{9} \int_0^1 (w \tilde{w})^2 dr + \frac{4\pi}{15} \int_0^1 \xi_2^{(2)}(r) [w \tilde{w} + r w' \tilde{w} - 2 r w \tilde{w}'] dr \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}_m^* \cdot [(\underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{u}_m^{(2)} + (\underline{u}_m \cdot \underline{v}) \underline{v} + (\underline{u}_m \cdot \underline{v}) \underline{v}] \rangle &= \\ \frac{4\pi}{15} \int_0^1 \psi_2^{(2)}(r) [w(r \tilde{w})' - 2 w \tilde{w}'] dr. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sigma_A^{(2)} = \sigma_{-1}^{(2)} = 0,$$

und es ist bemerkenswert, daß dies ein algebraisch-analytisches und kein numerisches Ergebnis ist. Gegenüber den nichtaxialsymmetrischen Störungen $m = \pm 1$ bis einschließlich der 2. Ordnung besteht für die stationäre Strömung also neutrale Stabilität.

Damit ist das Stabilitätsproblem gelöst, und es bietet sich an, das Ergebnis im Vergleich zur Lösung des ebenen Problems etwas näher zu beleuchten. Lortz (1961) hatte für die ebene Flüssigkeitsschicht mit temperaturunabhängigen Materialkoeffizienten gefunden, daß die stationäre Strömung in Form paralleler, die ganze Ebene überdeckender Walzen die einzige stabile Strömungsform darstellt. Die zwei Anwachsrate möglicher Störungen, die dabei auftraten, waren in niedrigster nichtverschwindender Ordnung

$$\sigma_a^{(2)} < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_b^{(2)} = 0.$$

Die Lösbarkeitsbedingungen für das Gleichungssystem 3. Ordnung hatten die Form

$$(V.9) \quad \begin{aligned} {}^{(2)}_R C_\mu + \sum_\nu T_{\mu\nu} C_\nu &= 0 \\ {}^{(2)}_\sigma \tilde{C}_\mu + \sum_\nu \tilde{T}_{\mu\nu} \tilde{C}_\nu &= 0. \end{aligned}$$

Ohne aus (II.9) die φ -Abhängigkeit zu eliminieren und unter Beibehaltung der Darstellung (III.15), hätten wir aus (II.9) mit $n = 3$ ebenfalls Lösbarkeitsbedingungen vom Typ (V.9) erhalten, statt der Koeffizienten C_μ lediglich die δ_m aus (III.15). Im Fall der ebenen Schicht waren nun aus der Determinantenbedingung für eine eindeutige Lösung von (V.9) die Eigenwerte R und σ zu berechnen. Wie sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit herausstellte, konnte dieses Verfahren für die homogene Vollkugel stark vereinfacht werden. Die Matrixelemente $T_{\mu\nu}^{(\mu)}$ und $\tilde{T}_{\mu\nu}$ von (V.9) ergeben sich hier mit der Darstellung $\underline{u}$ nach (III.15) etwa aus $\langle \underline{u}^{(1)*}(\underline{u}^{(1)} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^{(2)} \rangle$. Da $\underline{v}^{(2)}$ φ -unabhängig ist und $\underline{u}^{(1)} \sim e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1$, ergeben bei der Mittelung der Produkte $\underline{u}^{(1)*}(\underline{u}^{(1)} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^{(2)}$ nur diejenigen Terme einen nichtverschwindenden Beitrag, die das Produkt $e^{-im\varphi} e^{im'\varphi}$ mit $m = m'$ enthalten. Damit werden $T_{\mu\nu}$ und $\tilde{T}_{\mu\nu}$ diagonal, und (V.9) entkoppelt zu (V.1) und (V.2). Wir haben dieses Ergebnis vorweggenommen, indem wir die φ -Abhängigkeit frühzeitig aus (II.9) eliminierten. Daß diese Vereinfachung gegenüber dem Stabilitätsproblem der ebenen Schicht hier möglich ist, hängt klarerweise damit zusammen, daß dort der Eigenwert R der homogenen linearen Gleichungen unendlichfach, hier jedoch nur endlichfach (dreifach) entartet war. So konnte hier durch eine einfache Drehung des Koordinatensystems eine φ -unabhängige Darstellung von $\underline{v}$ gefunden und damit die Entartung des homogenen Eigenwertproblems praktisch aufgehoben werden.

Schlüter, Lortz & Busse (1965) haben auf die physikalische Bedeutung derjenigen Störung der stationären Walzenströmung in der ebenen Schicht hingewiesen, die bis einschließlich der 2. Ordnung die höchste Anwachsrate $\sigma = 0$ besitzt. Es handelt sich hierbei um eine Lösung der linearisierten Störungsgleichungen zum Eigenwert $\sigma = 0$, die durch infinitesimale Translation in der Schichtebene aus der Lösung der vollen nichtlinearen stationären Gleichungen gewonnen werden konnte. D.h. gegenüber infinitesimalen Parallelverschiebungen in der Schichtebene zeigten sich die Walzen lediglich neutral stabil - die physikalische Entsprechung der Invarianz des geometrischen Walzenmusters gegenüber Parallelverschiebungen in der Ebene.

In Analogie hierzu wird in Anhang C gezeigt, daß im Fall der homogenen Vollkugel die infinitesimal um eine beliebige Achse rotierte Lösung der vollen nichtlinearen stationären Konvektionsgleichungen gleichzeitig Lösung der linearisierten Störungsgleichungen zum Eigenwert $\sigma = 0$ ist. Daß die homogene Kugel für die stationäre Lösung keine feste Symmetrieachse bereitstellt, macht sich physikalisch in der Tatsache bemerkbar, daß die stationäre Strömung gegenüber infinitesimalen Rotationen lediglich neutrale Stabilität zeigt und jene die höchste der auftretenden Anwachsrate besitzen.

VI. Der Wärmetransport

Wir bezeichnen mit $q(\underline{r})$ die räumliche Dichte der zeitlich konstanten Energieerzeugungsrate und mit $\underline{H}$ den Vektor der Wärmestromdichte. Die stationäre Energiebilanz in der Boussinesq - Näherung lautet in dimensionsloser Bezeichnungsweise:

$$(VI.1) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{H} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} T - \underline{\nabla} T) = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} T - \Delta T = q(\underline{r})$$

Wir machen wie oben den Ansatz

$$T(\underline{r}) = T_0(r) + \theta(\underline{r})$$

mit der radialsymmetrischen Temperaturschichtung $T_0(r)$ des statischen Hintergrundes, den Randbedingungen

$$T_0(0) - T_0(1) = 1$$

$$\theta(0) = \theta(1) = 0$$

und

$$\underline{H} = \underline{v} \cdot T - \underline{\nabla} T = \theta \underline{v} - \frac{1}{2} R r^2 \underline{v} - \underline{\nabla} T,$$

$$H_r = v_r T - \partial_r T = \theta v_r - \frac{1}{2} R r r \cdot \underline{v} - \partial_r T.$$

Mittelung von H_r über r :

$$\begin{aligned} N &:= \int_0^1 H_r dr = \int_0^1 \left(\theta v_r - \frac{1}{2} R r r \cdot \underline{v} \right) dr - (T_0 + \theta)_0^1 \\ &= \int_0^1 \left(\theta v_r - \frac{1}{2} R r r \cdot \underline{v} \right) dr + 1. \end{aligned}$$

N ist die Nusseltzahl, der (undimensionierte) Gesamtwärmestrom in radialer Richtung. $N - 1$ gibt den Bruchteil des Wärmetransports an, der durch Konvektion der Gesamtwärmebilanz beigesteuert wird, als Potenzreihe in ε :

$$\begin{aligned}
 N - 1 &= \int_0^1 (\theta v_r - \frac{1}{2} R r \underline{r} \cdot \underline{v}) dr \\
 &= \int^1 \left[-\frac{1}{2} r \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \underline{R}^{(\nu)} \right) \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon^{\mu} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(\mu)} \right) + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \theta^{(\nu)} \right) \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon^{\mu} \underline{v}_r^{(\mu)} \right) \right] dr \\
 &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 r \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} dr + \varepsilon^2 \int_0^1 \left[\theta \underline{v}_r^{(1)} - \frac{r}{2} \underline{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} - \frac{r}{2} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} \underline{R} \right] dr + \varepsilon^3 \dots
 \end{aligned}$$

Wir mitteln jetzt $N - 1$ über eine Kugelfläche Σ_g mit dem Radius g , $0 < g \leq 1$, und beachten, daß aufgrund der Orthogonalität der $P_1^{m=0}(\cos \vartheta)$ alle Terme von höchstens quadratischer Ordnung dabei verschwinden bis auf den mit

$$\begin{aligned}
 \theta \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} &\approx (P_{l=1}^{m=0}(\cos \vartheta))^2 : \\
 \overline{N-1} &:= \frac{1}{|\Sigma_g|} \int_{\Sigma_g} N d\Sigma_g - 1 = \varepsilon^2 \int_0^1 \overline{\theta \underline{v}_r^{(1)}} dr + O(\varepsilon^3)
 \end{aligned}$$

Würde man nicht H_r zunächst über r mitteln, sondern die Oberflächenintegration $\overline{H}_r$ unmittelbar ausführen, wäre nach dem Wärmeerhaltungssatz (jede Kugelfläche Σ_g mit $0 < g \leq 1$ umschließt ganz ein Teilvolumen der Kugel)

$$\overline{H}_{r,g} + \frac{dT_0}{dr}(g) = 0.$$

Die explizite Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
 H_r &= \varepsilon \left[-\frac{1}{2} r \underline{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)} + \partial_r \theta^{(1)} \right] + \varepsilon^2 \left[\theta \underline{v}_r^{(1)} - \frac{1}{2} r \underline{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)} - \partial_r \theta^{(2)} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^3 \dots - \frac{d}{dr} T_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{H_r} + \frac{dT_0}{dr} &= \overline{H_r} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dT_0}{dr} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\
 &= -\frac{1}{2} \varepsilon \overline{r \underline{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(1)}} + \varepsilon^2 \left[\overline{\underline{v}_r \theta^{(1)}} - \frac{r}{2} \overline{\underline{R} \underline{r} \cdot \underline{v}^{(2)}} - \overline{\partial_r \theta^{(2)}} \right] + O(\varepsilon^3) \\
 &= \varepsilon^2 \left[\overline{\theta \underline{v}_r^{(1)}} - \partial_r \overline{\theta^{(2)}} \right] + O(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 \left[\overline{\theta \underline{v}_r^{(1)}} - \xi_0^{(1)}(r) - \xi_2^{(1)}(r) P_{l=2}^{m=0}(\cos \vartheta) \right] \\
 &\quad + O(\varepsilon^3)
 \end{aligned}$$

Man beachte, daß nach (IV.14)

$$\theta^{(1)} v_r - \sum_0^{(2)} (r) = \frac{W \tilde{W}}{r} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) = \frac{W \tilde{W}}{r} P_{\ell=2}^{m=0}(\cos \vartheta)$$

Daraus folgt

$$\bar{H}_r + \overline{T_0'(r)} = \varepsilon^2 \left[\frac{W \tilde{W}}{r} - \sum_2^{(2)} (r) \right] \overline{P_{\ell=2}^{m=0}} + O(\varepsilon^3) = 0 + O(\varepsilon^3).$$

Wir fassen zusammen:

$$\bar{N} - 1 \cong \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

mit einer von der Prandtlzahl P unabhängigen Proportionalitätskonstanten. Wegen

$$R - \overset{(0)}{R} \approx \varepsilon^2 \overset{(2)}{R}$$

ist aber näherungsweise

$$(VI.2) \quad \varepsilon^2 = \frac{R - \overset{(0)}{R}}{\overset{(2)}{R}} \cong \bar{N} - 1,$$

so daß $\bar{N}$ über $\overset{(2)}{R}$ dennoch von P abhängt. Diese einfache quadratische, von der Prandtlzahl unabhängige Funktion zwischen $\bar{N}$ und ε tritt auch in der Strömungstheorie der ebenen Schicht auf. Nach (V.7) und (VI.2) ist für

$$\left| \frac{R - \overset{(0)}{R}}{R} \right| \ll 1,$$

d.h. hinreichend kleines ε der Zusammenhang von N , R und P gegeben durch

$$\bar{N} - 1 \cong P^2 (R - \overset{(0)}{R}) \quad \text{für } 0 < P \ll 1$$

und

$$\bar{N} - 1 \cong R - \overset{(0)}{R} \quad \text{für } P \gg 1.$$

VII. Zusammenfassung

Die nichtlinearen zeitabhängigen hydrodynamischen Grundgleichungen wurden für eine homogene Flüssigkeitskugel mit Hilfe eines geeigneten Störungsansatzes bis zur 2. Ordnung im Störungsparameter gelöst. Die Rechnung war auf den Fall eines schwach überkritischen Temperaturgradienten in der Kugel beschränkt. Dies ermöglichte es, die Grundgleichungen in der sog. Boussinesq-Näherung zu behandeln. Die gefundene stationäre Strömung erwies sich gegenüber axial- bzw. nichtaxialsymmetrischen Störungen von neutraler bzw. vollkommener Stabilität. Der Vergleich mit dem Stabilitätsproblem der schwach überkritischen ebenen Flüssigkeitsschicht zeigte strukturelle Gemeinsamkeiten beider Probleme hinsichtlich infinitesimaler Symmetrieoperationen (Drehung bzw. Parallelverschiebung der stationären Lösungen der Kugel bzw. der ebenen Schicht): Gegenüber Störungen der stationären Strömung, die als solche infinitesimalen Symmetrieoperationen darstellbar sind, herrscht lediglich neutrale Stabilität.

- - - -

Abschließend gilt mein besonderer Dank Herrn Dr. Dietrich Lortz, Max-Planck-Institut für Plasma-physik/Garching, der in vielen hilfreichen Gesprächen und durch nützliche Kritik sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Desgleichen danke ich Herrn Dr. Gerhard Börner, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik/München, der das Thema angeregt hat, sowie Herrn Dr. Nigel Weiss, University of Cambridge/England, für seine freundliche Anteilnahme, die er während meines Studienaufenthaltes in Cambridge dieser Arbeit entgegenbrachte.

Anhang

A. Zur allgemeinen Lösung des homogenen Problems

Bei der Darstellung der Lösung der homogenen Gleichungen in Abschnitt III haben wir Gebrauch gemacht von der Beziehung

$$(A.1) \quad j_1(\alpha e^{i\pi/3} r) = (-1)^l j_1^*(\alpha r e^{2i\pi/3})$$

zwischen den sphärischen Besselfunktionen j_l und j_l^* zu ganzzahligem l (Bezeichnungsweise nach Eder (1967)) bei beliebigem reellem $\alpha \neq 0$. (A.1) soll durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Wir wählen zunächst die Abkürzungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha r e^{i\pi/3} \\ z_2 &= \alpha r e^{2i\pi/3} \\ z_1 &= -z_2^* \end{aligned}$$

und notieren die Rekursionsformel

$$j_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} j_l(z) - j_{l-1}(z) .$$

(A.1) ist für $l = 0$ und $l = 1$ erfüllt:

$$\begin{aligned} j_0(z_1) &= \frac{\sin z_1}{z_1} = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2iz_1} = -\frac{e^{iz_2^*} - e^{-iz_2}}{2z_2^* i} \\ &= \frac{e^{iz_2^*} - e^{-iz_2}}{2iz_2} = -\left(\frac{e^{-iz_2} - e^{iz_2}}{2iz_2}\right)^* = \left(\frac{\sin z_2}{z_2}\right)^* = j_0^*(z_2) \\ j_1(z_1) &= \frac{1}{z_1} j_0(z_1) - \frac{\cos z_1}{z_1} = -\frac{j_0^*(z_2)}{z_2^*} + \frac{\sqrt{1 - z_2^2} (j_0^*(z_2))^2}{z_2^*} \end{aligned}$$

$$= - \left(\frac{j_0(z_2)}{z_2} - \frac{\sqrt{1-z_2^2} j_0^2(z_2)}{z_2} \right)^* = - j_1^*(z_2).$$

Schluß vom 1 auf $1 + 1$:

$$\begin{aligned} j_{\ell+1}(z_1) &= \frac{2\ell+1}{z_1} j_{\ell}(z_1) - j_{\ell-1}(z_1) \\ &= -\frac{2\ell+1}{z_2^*} (-1)^{\ell} j_{\ell}^*(z_2) - (-1)^{\ell-1} j_{\ell-1}^*(z_2) \\ &= (-1)^{\ell+1} \left[\frac{2\ell+1}{z_2} j_{\ell}(z_2) - j_{\ell-1}(z_2) \right]^* = (-1)^{\ell+1} j_{\ell+1}^*(z_2) \\ &\quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun noch, daß die drei zur Darstellung von (III.10) benutzten Funktionen $j_1(z)$, $\operatorname{Re} j_1(ze^{i\pi/3})$ und $\operatorname{Im} j_1(ze^{i\pi/3})$, $z = \alpha r$, linear unabhängig sind und daher in dem von ihnen aufgespannten (endlichdimensionalen) Funktionenraum ein Fundamentalsystem bilden:

Sei

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 j_1(z) + B_1 \operatorname{Re} j_1(ze^{i\pi/3}) + C_1 \operatorname{Im} j_1(ze^{i\pi/3}) = \\ &= z^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{(2n)!!(2\ell+2n+1)!!} \left(A_{\ell} + B_{\ell} \cos \frac{\ell+2n}{3} \pi + C_{\ell} \sin \frac{\ell+2n}{3} \pi \right) \end{aligned}$$

mit A_1, B_1 und $C_1 \in \mathbb{R}$, Reihenentwicklung und Bezeichnungsweise nach Eder (1967). Daraus folgt

$$A_1 + B_1 \cos \frac{1+2n}{3} \pi + C_1 \sin \frac{1+2n}{3} \pi = 0$$

für alle $n, 1 = 0, 1, 2 \dots$

In dieser Gleichung wird nacheinander $n = 0, 1, 2$ gesetzt. Die Fälle $n \geq 3$ führen auf die Fälle $n = 0, 1, 2$ zurück.

Es ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für A_1 , B_1 und C_1 , das sich nach Elimination von A_1 reduziert auf

$$B_1 \cos \frac{1\pi}{3} + C_1 \sin \frac{1\pi}{3} = 0$$

$$B_1 \sin \frac{1\pi}{3} - C_1 \cos \frac{1\pi}{3} = 0.$$

Ist entweder $\cos \frac{1\pi}{3}$ oder $\sin \frac{1\pi}{3}$ gleich Null, ergibt sich daraus sofort $A_1 = B_1 = C_1 = 0$. Sind beide von Null verschieden, multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos \frac{1\pi}{3}$, die zweite mit $\sin \frac{1\pi}{3}$ und addiert die beiden. Daraus folgt dann ebenfalls

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

In der Theorie der Besselfunktionen ist es üblich, die lineare Unabhängigkeit zweier Besselfunktionen über die Berechnung ihrer Wronskideterminante zu zeigen. Da es sich im vorliegenden Fall um die lineare Unabhängigkeit dreier Besselfunktionen dreht, die zudem noch eine schwerfällige allgemeine Darstellung (beliebiges l) besitzen, dürfte der Weg über die Wronskideterminante hier kaum gangbar sein.

B. Zur Konstruktion spezieller Lösungen der inhomogenen Gleichungen

Die Gleichungen (IV.12) und (IV.13) sind vom Typ

$$(B.1) \quad (D_1^3 + 1(1+1)R^{(0)})\Psi_1(r) = I(r)$$

mit irgendwelchen Inhomogenitäten $I(r)$. Wir setzen

$$z_\mu = \alpha_1 e^{i\mu\pi/3}$$

$$z_\mu^6 = 1(1+1)R^{(0)}, \quad \mu = 0, 1, 2$$

mit

$$(B.2) \quad \sum_{\mu=0}^2 z_\mu^2 = \sum_{\mu=0}^2 z_\mu^4 = 0$$

$$\partial_\mu := D_1 + z_\mu^2$$

$$\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2.$$

Wegen (B.2) hat man

$$(B.3) \quad \prod_{\mu=0}^2 \partial_\mu = D_1^3 + \left(\sum_{\mu=0}^2 z_\mu^2\right) D_1^2 + \left(\sum_{\mu=0}^2 z_\mu^4\right) D_1 + \alpha_1^6$$

$$= D_1^3 + 1(1+1)R^{(0)}.$$

Sei $\{\mu, \nu, \lambda\}$ irgendeine Permutation von $\{0, 1, 2\}$ und $h(r)$ eine Lösung von

$$(B.4a) \quad \partial_\mu h(r) = I(r),$$

$g(r)$ von

$$(B.4b) \quad \partial_\nu g(r) = h(r)$$

und $f(r)$ von

$$(B4.c) \quad \partial_x f(r) = g(r) .$$

Dann ist $f(r)$ aufgrund von (B.3) und (B.4) auch Lösung von (B.1):

$$(D_1^3 + 1(1+1)R)f(r) = \prod_{\lambda=0}^2 \partial_\lambda f(r) = \partial_\mu \partial_\nu \partial_x f(r) = I(r) .$$

Es ist uns also in einem ersten Schritt gelungen, die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 6. Ordnung (B.1) auf die Lösung dreier Differentialgleichungen 2. Ordnung zurückzuführen. Wir machen jetzt von den Relationen

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \partial_\nu + z_\mu^2 - z_\nu^2 \\ \partial_x \partial_\mu &= \partial_x \partial_\nu + (z_\mu^2 - z_\nu^2) \partial_x \end{aligned}$$

$$(B.5a) \quad \partial_x = \frac{1}{z_\mu^2 - z_\nu^2} (\partial_\mu - \partial_\nu) \partial_x$$

$$(B.5b) \quad \partial_\nu = \frac{1}{z_x^2 - z_\mu^2} (\partial_x - \partial_\mu) \partial_\nu$$

$$(B.5c) \quad \partial_\mu = \frac{1}{z_\nu^2 - z_x^2} (\partial_\nu - \partial_x) \partial_\mu$$

Gebrauch, definieren die Funktionen $F_\mu(r) = F(z_\mu, r)$, wobei

$$(B.6) \quad \partial_\lambda F_\lambda(r) = I(r) , \quad \lambda = 0, 1, 2$$

und schreiben mit $f(r)$ aus (B.4c)

$$F_\mu(r) = \partial_\nu \partial_x f(r) .$$

Jetzt läßt sich die Lösung von (B.1) unter Zuhilfenahme von (B.5) in eine lineare Superposition der $F_\mu(r)$ auflösen:

$$\begin{aligned}
 (z_\mu^2 - z_\nu^2) f(r) &= (\partial_\mu - \partial_\nu) f(r) = \\
 &= \frac{1}{z_\nu^2 - z_\mu^2} (\partial_\nu - \partial_\mu) \partial_\mu f(r) - \frac{1}{z_\mu^2 - z_\nu^2} (\partial_\mu - \partial_\nu) \partial_\nu f(r) \\
 &= \frac{F_\mu - F_\nu}{z_\nu^2 - z_\mu^2} - \frac{F_\nu - F_\mu}{z_\mu^2 - z_\nu^2},
 \end{aligned}$$

in kompakter Darstellung:

$$f(r) = \sum_{\nu=0, \nu \neq \mu} \frac{F(z_\mu r)}{\prod_{\nu=0, \nu \neq \mu} (z_\nu^2 - z_\mu^2)}$$

oder, da aus (B.2) folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\prod_{\nu=0, \nu \neq \mu} (z_\nu^2 - z_\mu^2)} &= z_\mu^4, \\
 \text{(B.7)} \quad f(r) &= \sum_{\mu \neq 0} z_\mu^{-4} F(z_\mu r).
 \end{aligned}$$

Es ist somit in einem zweiten Schritt gelungen, die drei Integrationsschritte zur Lösung von (B.4) zu umgehen und durch eine Linearkombination der drei Lösungen von (B.6) auszudrücken.

(B.6) läßt spezielle Lösungen in analytischer Darstellung zu. Wir machen den Ansatz

$$F(zr) = j_1(zr) \phi(r),$$

$$\begin{aligned}
 (D_1 + z^2) F(zr) &= \phi (D_1 + z^2) j_1(zr) + j_1(zr) \left[\phi'' + 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{j_1'}{j_1} \right) \phi' \right] \\
 &= j_1(zr) \left(\phi'' + \phi' \frac{d}{dr} \ln r^2 j_1^2(zr) \right)
 \end{aligned}$$

und lösen

$$\phi'' + \phi' \frac{d}{dr} \ln r^2 j_1^2(zr) = \frac{I(r)}{j_1(zr)}$$

mit Hilfe der Methode der "Variation der Konstanten"
(s.z.B. Collatz 1967):

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{1}{r^2 j_\ell^2(zr)} \left[C + \int^r s^2 J(s) j_\ell(zs) ds \right] \\ \varphi &= C \int \frac{dr}{r^2 j_\ell^2(zr)} + \int \frac{1}{r^2 j_\ell^2(zr)} \int^r s^2 J(s) j_\ell(zs) ds dr \\ &= \left[C + \int^r s^2 J(s) j_\ell(zs) ds \right] \int \frac{dr}{r^2 j_\ell^2(zr)} - \int^r J(r) j_\ell(zr) \int \frac{ds}{s^2 j_\ell^2(zs)}\end{aligned}$$

Die Identität

$$J_\nu(x) J_{-\nu}'(x) - J_\nu'(x) J_{-\nu}(x) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi x}$$

für die Besselfunktionen $J_\nu(x)$ mit halbzahligem Index ν geht für die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen über in

$$n_1'(x) j_1(x) - j_1'(x) n_1(x) = \frac{1}{x^2},$$

wenn $\nu = 1 + \frac{1}{2}$

gesetzt wird. Daraus folgt

$$\frac{1}{x^2 j_\ell^2(x)} = \frac{n_\ell'(x)}{j_\ell(x)} - \frac{j_\ell'(x) n_\ell(x)}{j_\ell^2(x)}$$

und, nach partieller Integration,

$$\int \frac{dx}{x^2 j_\ell^2(x)} = \frac{n_\ell(x)}{j_\ell(x)}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= z C \frac{n_\ell(zr)}{j_\ell(zr)} + z \left[\frac{n_\ell(zr)}{j_\ell(zr)} \int^r J(r) j_\ell(zr) dr - \int^r J(r) n_\ell(zr) dr \right] \\ F(zr) &= C z n_\ell(zr) + z \left\{ n_\ell(zr) \int^r J(r) j_\ell(zr) dr - j_\ell(zr) \int^r J(r) j_\ell(zr) dr \right\}\end{aligned}$$

Da $n_1(zr)$ divergiert für $r \rightarrow 0$, setzen wir
 $C \neq 0$ und, zur Bestimmung von (B.7),

$$F(z_\mu r) = C_\mu j_\ell(z_\mu r) + z_\mu \left\{ n_\ell(z_\mu r) \int r^2 J(r) j_\ell(z_\mu r) dr - j_\ell(z_\mu r) \int r^2 J(r) n_\ell(z_\mu r) dr \right\}$$

$$\mu = 0, 1, 2,$$

wobei die C_μ zur Anpassung von (B.7) an die zu (III.9)
 analogen Randbedingungen dienen.

C. Infinitesimale Rotation der stationären Gleichungen

Gegeben seien eine Funktion $\varphi(\underline{r})$ und eine Drehung $\underline{A}$ des Koordinatensystems, die $\underline{r}$ in $\underline{r}'$ und φ an der Stelle $\underline{r}$ in $\varphi(\underline{r}') = \varphi(\underline{A} \cdot \underline{r})$ überführen möge. Sei $\underline{a}$ die Richtung der Drehachse mit $\underline{a}^2 = 1$, ansonsten jedoch beliebig, und δ der Drehwinkel mit $|\delta| \ll 1$. Dann läßt sich $\underline{r}'$ darstellen als (s.z.B. Teichmann (1968))

$$\begin{aligned}\underline{r}' &= \underline{r} \cos \delta + (\underline{a} \times \underline{r}) \sin \delta + (\underline{a} \cdot \underline{r}) \underline{a} (1 - \cos \delta) \\ &\approx \underline{r} + \delta \underline{a} \times \underline{r} =: \underline{r} + \underline{h}\end{aligned}$$

und (s.z.B. Erwe (1962))

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}') &\approx \varphi(\underline{r} + \underline{h}) = \sum_{n=0}^N (\underline{h} \cdot \underline{\nabla})^n \frac{1}{n!} \varphi(\underline{r}) + \text{Restglied} \\ &\approx \varphi(\underline{r}) + \delta (\underline{a} \times \underline{r}) \cdot \underline{\nabla} \varphi(\underline{r}) \\ &= \varphi(\underline{r}) + \delta \underline{a} \cdot (\underline{r} \times \underline{\nabla}) \varphi(\underline{r}).\end{aligned}$$

Eine infinitesimale Drehung δ des Koordinatensystems um $\underline{a}$ transformiert $\varphi(\underline{r})$ um $\underline{a} \cdot \underline{r} \times \underline{\nabla} \varphi(\underline{r})$. Der Operator $\underline{a} \cdot \underline{r} \times \underline{\nabla}$ vertauscht mit L^2 - wovon oft die Übungen zur Quantenmechanik bestritten werden, was aber wegen

$$L^2 = -(\underline{r} \times \underline{\nabla})^2$$

trivial ist - und daher auch mit dem Laplaceoperator, da $\underline{r} \times \underline{\nabla}$ von r nicht abhängt.

Gegeben seien nun die stationären Konvektionsgleichungen (II.5) für ein rein poloidales $\underline{v}$ mit

$$(II.12) \quad \underline{r} \cdot \underline{\nabla} = L^2 \Psi.$$

Wir definieren

$$\underline{a} \cdot \underline{r} \times \underline{\nabla} \psi = \varphi(\underline{r})$$

$$\underline{a} \cdot \underline{r} \times \underline{\nabla} \theta = \tau(\underline{r})$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{r} \varphi) = \underline{u}(\underline{r})$$

und behaupten, daß bei Anwendung des Operators der infinitesimalen Rotation auf

$$(II.5b) \quad R L^2 \psi + \Delta \theta = \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \theta$$

(II.5b) übergeht in (II.6b), die linearisierte skalare Stabilitätsgleichung zum Eigenwert $\sigma = 0$.

Für die linke Seite von (II.5b) ist die Behauptung trivial. Zum Beweis der rechten Seite setzen wir

$$\underline{b} = \underline{a} \times \underline{r} \quad \text{mit} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{b} = 0 = \underline{r} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{w} = \underline{r} \times \underline{\nabla} \psi \quad \text{mit} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{w} = \underline{r} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\text{und} \quad \underline{b} \cdot \underline{\nabla} \psi = \underline{a} \cdot \underline{w}.$$

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{\nabla} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \theta) &= \underline{\nabla} \cdot \underline{b} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \theta) = \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \theta \times (\underline{b} \times \underline{r}) + \underline{r} (\underline{b} \cdot \underline{\nabla} \theta)] \\ &= \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \tau + \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \theta \times (\underline{b} \times \underline{r})] = \underline{r} \cdot \underline{\nabla} \tau + \underline{\nabla} \times (\underline{r} \times \underline{b}) \cdot \underline{\nabla} \theta \end{aligned}$$

Es ist nun zu zeigen, daß

$$\underline{\nabla} \times (\underline{r} \times \underline{b}) = \underline{u} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{r} (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \psi).$$

Bew.:

$$\begin{aligned} (a) \quad \underline{r} (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \psi &= \underline{b} \times (\underline{r} \times \underline{\nabla} \psi) + (\underline{r} \cdot \underline{b}) \underline{\nabla} \psi \\ &= \underline{b} \times \underline{w} = \underline{r} (\underline{a} \cdot \underline{w}) - \underline{a} (\underline{r} \cdot \underline{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a) \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \times \underline{r} (\underline{b} \cdot \underline{\nabla} \psi) &= \underline{\nabla} \times (\underline{b} \times \underline{w}) = \underline{\nabla} \times \underline{r} (\underline{a} \cdot \underline{w}) - \underline{\nabla} \times \underline{a} (\underline{r} \cdot \underline{w}) \\
 &= \underline{a} \times \underline{\nabla} (\underline{r} \cdot \underline{w}) - \underline{r} \times \underline{\nabla} (\underline{a} \cdot \underline{w}) \\
 &= \underline{a} \times \{ \underline{w} + (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + \underline{r} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w}) \} \\
 &= \underline{a} \times \underline{w} + \underline{a} \times (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + \underline{b} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & - (\underline{a} \cdot \underline{r}) \underline{\nabla} \times \underline{w} + \underline{a} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{w}) - \underline{r} \times (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} \\
 & + \underline{b} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w}) + (\underline{r} \cdot \underline{a}) \underline{\nabla} \times \underline{w} - \underline{r} (\underline{a} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{w}) \\
 & = \underline{b} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w}) + \underline{a} \times \underline{w} + \underline{a} \times (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} - \underline{r} \times (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} &= \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \times (\underline{w} \times \underline{a}) + \underline{\nabla} (\underline{a} \cdot \underline{w}) - \underline{a} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})] \\
 (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} &= \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \times (\underline{w} \times \underline{r}) + \underline{\nabla} (\underline{r} \cdot \underline{w}) - \underline{r} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \underline{\nabla} \times (\underline{w} \times \underline{a}) &= (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} \\
 \underline{\nabla} \times (\underline{w} \times \underline{r}) &= -(\underline{w} \cdot \underline{\nabla}) \underline{r} + (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + 3 \underline{w} \\
 &= (\underline{r} \cdot \underline{w}) + 2 \underline{w}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \} \quad & (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} = \underline{\nabla} (\underline{a} \cdot \underline{w}) - \underline{a} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w}) \\
 (d) \} \quad & (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} = 2 \underline{w} - \underline{r} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f) \quad \underline{\nabla} \times [\underline{a} \times (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w}] &= [(\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} \cdot \underline{\nabla}] \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} \\
 & \quad + \underline{a} [\underline{\nabla} \cdot (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w}] \\
 &= -(\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + \underline{a} (2 \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - \underline{\nabla} \cdot \underline{r} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})) \\
 &= -(\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + \underline{a} (\underline{r} \cdot (\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w}))) - (\underline{\nabla} \times \underline{w}) (\underline{\nabla} \times \underline{r}) \\
 &= -(\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w} + \underline{a} ((2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \cdot \underline{w} - \Delta \underline{r} \cdot \underline{w}) \\
 &= -(\underline{a} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{w}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g) \quad \nabla \times (\underline{r} \times (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w}) &= [((\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w}) \cdot \nabla] \underline{r} - (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&\quad + \underline{r} \cdot \nabla \cdot ((\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w}) - 3(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&= -2(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} + \underline{r} \Delta \underline{a} \cdot \underline{w} - \underline{r} (\nabla \cdot \underline{a} \times (\nabla \times \underline{w})) - (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&= -2(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} + \underline{r} \Delta \underline{a} \cdot \underline{w} - \underline{r} (\nabla \times \underline{w}) \cdot (\nabla \times \underline{a}) \\
&\quad - (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} - \underline{a} \cdot \nabla \times (\nabla \times \underline{w}) \\
&= -2(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} + \underline{r} \Delta \underline{a} \cdot \underline{w} - \underline{r} (\underline{a} \cdot \Delta \underline{w}) - (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&\quad + \underline{r} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{w}) \\
&= -2(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} - (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b)-(g) \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times (\underline{r} \cdot \nabla) \underline{\psi}) &= \nabla \times (\underline{r} \times \underline{b}) \\
&\quad - (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} + 2(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} + (\underline{r} \cdot \nabla) (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&\quad - (\underline{a} \cdot \nabla) (\underline{r} \cdot \nabla) \underline{w} \\
&= \nabla \times (\underline{r} \times \underline{b}) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zur Vektorgleichung (II.5a) bzw.

$$(II.5a') \quad -\Delta^2 L^2 \underline{\psi} + L^2 \underline{\theta} = P^{-1} \underline{r} \cdot (\nabla \times (\nabla \times (\underline{r} \cdot \nabla) \underline{\psi}))$$

über und behaupten, daß eine infinitesimale Drehung (II.5a') überführt in

$$-\Delta^2 L^2 \underline{\psi} + L^2 \underline{\tau} = P^{-1} \underline{r} \cdot \nabla \times (\nabla \times ((\underline{u} \cdot \nabla) \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{u}))$$

Für die linke Seite ist die Behauptung trivial. Die rechte Seite schreiben wir als

$$\underline{r} \cdot \nabla \times (\nabla \times (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}) = (2 + \underline{r} \cdot \nabla) \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \Delta \underline{r} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

$$= (2 + \underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \left(\frac{1}{2} \Delta \underline{r}^2 - (\underline{\nabla} \times \underline{r})^2 - \underline{r} \cdot \Delta \underline{r} \right) \\ - \Delta [(\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) L^2 \psi - \underline{r}^2],$$

Der Rotationsoperator $\underline{b} \cdot \underline{\nabla}$ vertauscht mit $\underline{r} \cdot \underline{\nabla}$:

$$(\underline{r} \cdot \underline{\nabla})(\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \psi = ((\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}) \cdot \underline{\nabla} \psi + \underline{b} \cdot (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \psi \\ = ((\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{a} \times \underline{r}) \cdot \underline{\nabla} \psi + \frac{1}{2} \underline{b} \cdot (\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \psi \times \underline{r}) + \underline{\nabla} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla} \psi) \\ + \underline{r} \Delta \psi - 3 \underline{\nabla} \psi) \\ = \underline{b} \cdot \underline{\nabla} \psi + \frac{1}{2} \underline{b} \cdot ((\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \psi + \underline{\nabla} (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \psi - \underline{\nabla} \psi) \\ = \frac{1}{2} \underline{b} \cdot \underline{\nabla} \psi + \frac{1}{2} (\underline{b} \cdot (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \psi + (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \psi) \\ = (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) (\underline{r} \cdot \underline{\nabla}) \psi$$

Das Glied $(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) L^2 \psi$ ist vom gleichen Typ wie die rechte Seite von (II.5b) und kann daher als erledigt gelten, für die Glieder mit $\underline{v}^2$ ergibt sich:

$$(\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^2 = 2 \underline{v} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} \\ = 2 \underline{v} \cdot ((\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}) + 2 \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b} \\ = 2 \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{b}) + 2 \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b} \\ = 2 \underline{v} \cdot \underline{u} + 2 \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b} \\ = 2 \underline{v} \cdot \underline{u} + 2 \underline{v} \cdot (\underline{a} \times \underline{v}) = 2 \underline{v} \cdot \underline{u}$$

Weiterhin:

$$(\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} \cdot \Delta \underline{v} = ((\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}) \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \Delta (\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} \\ = [(\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}] \cdot \Delta \underline{v} + ((\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}) \cdot \Delta \underline{v} \\ + \underline{v} \cdot \Delta [(\underline{b} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}] + \underline{v} \cdot \Delta (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{b}$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{u} \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \Delta \underline{u} + (\underline{a} \times \underline{v}) \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \Delta \underline{a} \times \underline{v} \\
&= \underline{u} \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \Delta \underline{u} + (\underline{a} \times \underline{v}) \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{a} \times \Delta \underline{v} \\
&= \underline{u} \cdot \Delta \underline{v} + \underline{v} \cdot \Delta \underline{u}
\end{aligned}$$

Wir benutzen das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} &= \frac{1}{2} \nabla \times [\nabla \times (\underline{v} \times \underline{b}) + \nabla (\underline{v} \cdot \underline{b}) - \underline{b} \times (\nabla \times \underline{v}) \\
&\quad - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{b})] \\
&= \frac{1}{2} \nabla \times [(\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{b} - \underline{b} \times (\nabla \times \underline{v}) + 2 \underline{a} \times \underline{v}] \\
&= \frac{1}{2} \nabla \times [(\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} - \underline{b} \times (\nabla \times \underline{v}) + \underline{a} \times \underline{v}] \\
\Rightarrow \nabla \times (\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} &= - \nabla \times (\underline{b} \times (\nabla \times \underline{v})) + \nabla \times (\underline{a} \times \underline{v}) \\
&= - [(\nabla \times \underline{v}) \cdot \nabla) \underline{b} - (\underline{b} \cdot \nabla) \nabla \times \underline{v}] - (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v} \\
&= (\underline{b} \cdot \nabla) \nabla \times \underline{v} - \underline{a} \times (\nabla \times \underline{v}) - (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v}
\end{aligned}$$

zur Behandlung von $(\underline{b} \cdot \nabla) (\nabla \times \underline{v})^2$

$$\begin{aligned}
(\underline{b} \cdot \nabla) (\nabla \times \underline{v})^2 &= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot (\underline{b} \cdot \nabla) (\nabla \times \underline{v}) \\
&= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot [\nabla \times (\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} + \underline{a} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v}] \\
&= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot [\nabla \times ((\underline{b} \cdot \nabla) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{b}) + \nabla \times (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{b} \\
&\quad + \underline{a} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v}] \\
&= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot (\nabla \times \underline{u}) + 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot [\nabla \times (\underline{a} \times \underline{v}) \\
&\quad + \underline{a} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v}] \\
&= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot (\nabla \times \underline{u}) + 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot [-(\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v} \\
&\quad + \underline{a} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{a} \cdot \nabla) \underline{v}] \\
&= 2 (\nabla \times \underline{v}) \cdot (\nabla \times \underline{u}) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Literatur

- Baldwin, P. 1967 Proc.Cambr.Phil.Soc. 63, 855.
- Bénard, H. 1901 Ann.Chim. et Phys. 23, 62.
- Busse, F. 1962 "Das Stabilitätsverhalten der Zellularkonvektion bei endlicher Amplitude". Dissertation, Universität München.
- Busse, F. 1975 J.Fluid Mech. 72, 67.
- Chandrasekhar, S. 1961 "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability". Oxford: Clarendon Press.
- Collatz, L. 1967 "Differentialgleichungen", 3.Aufl. Stuttgart: Verlag B. G.Teubner.
- Durney, B. 1968 J.Atmos.Sci. 25, 372.
- Eder, G. 1967 "Elektrodynamik". Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Eder, G. 1968 "Quantenmechanik I". Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Erwe, F. 1962 "Differential- und Integralrechnung I". Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Kuo, H.L. 1961 J. Fluid Mech. 10, 611.
- Lortz, D. 1961 "Instabilitäten der stationären Konvektionsströmungen endlicher Amplitude". Dissertation, Universität München.
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 J.Fluid Mech. 4, 225.
- Malkus, W.V.R. 1964 Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics at the Woods Hole Oceanographic Institution 64 - 46, I 1.
- Mihaljan, J.M. 1962 Astrophys. J. 136, 1126.
- Rayleigh, Lord 1916 Phil. Mag. 3 (6), 529.

- Schwarzschild, M. 1958 "Structure and Evolution of the Stars". Princeton: University Press.
- Schlüter, A., Lortz, D. & Busse, F. 1965 J. Fluid Mech. 23, 129.
- Spiegel, E.A. 1971 Ann. Rev. Astron. Astrophys. 9, 323.
- Teichmann, H. 1968 "Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung". Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Watson, G.N. 1966 "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", 2. Aufl. Cambridge : University Press.
- Weir, A.D. 1976 J. Fluid Mech. 75, 49.
- Young, R. 1974 J. Fluid Mech. 63, 695.

Lebenslauf

Gebhard Geiger, geb. am 6. Nov. 1948 in Bensheim
an der Bergstraße, Sohn des Journalisten
Walter Geiger und dessen Ehefrau Klara, geb. Weber.

Kindheit und Schulzeit in Bensheim, dort Abitur im
Sommer 1967 am Alten Kurfürstlichen Gymnasium,
mathematisch-naturwissenschaftlicher Oberstufen-
zweig.

Ab WS 1967 / 68 Studium der Physik an der Universität
Freiburg i.Brsg., dort Vordiplom im SS 1969.

Anschließend Fortsetzung des Studiums an der Ludwig -
Maximilians - Universität München, dort Diplom-
hauptprüfung im WS 1972 / 73.

Ab SS 1973 Studium der Mathematik und Beginn einer
Dissertation im SS 1975 auf dem Gebiet der
astrophysikalischen Konvektionstheorie.

Die ...
...
...

...
...
...

...
...
...

...
...
...

...
...
...

...
...
...

